Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 2, 2015.
Trabalho apresentado no III CMAC - SE, Vitória-ES, 2015.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

Análise Pós-Otimização: O Significado dos Multiplicadores de Lagrange

Antônio César Miálich Júnior[1]
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - Câmpus São José do Rio Preto - DMAp
Valeriano Antunes de Oliveira[2]
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - Câmpus São José do Rio Preto - DMAp

Resumo. Os multiplicadores de Lagrange desempenham um papel de destaque na teoria de otimização, bem como nos métodos numéricos. Os multiplicadores têm uma geometria bem como um significado físico. Os seus valores dependem da forma das funções de custo e de restrição. Se estas funções mudam, os valores dos multiplicadores de Lagrange também mudam.

O estudo de variações na solução ótima onde alguns dos parâmetros do problema original são alterados é conhecido como análise pós-otimização ou análise de sensibilidade. Este é um tema importante para *design* ótimo de sistemas de engenharia.

Palavras-chave. Otimização, Matemática Aplicada, Multiplicadores de Lagrange.

1 O Efeito na Mudança dos Limites nas Restrições

Vamos considerar aqui o seguinte problema de otimização não-linear

$$\begin{array}{l} \min\ f(x) \\ \text{sujeito a} \\ \qquad h_j(x) = 0,\ j = 1, ..., p, \\ \qquad g_i(x) \leq 0,\ i = 1, ..., m, \\ \qquad x \in \Omega, \end{array}$$

onde $f, h_j, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são funções arbitrárias com $j = 1, ..., p$ e $i = 1, ..., m$, e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto qualquer.

Vamos supor que o problema de minimização foi resolvido com $h_i(x) = 0$ e $g_j(x) \leq 0$, e vamos denotar a solução ótimo por x^*. Assim, queremos saber o que acontece com a função de custo no ponto ótimo quando os limites de restrição são alterados para valores diferentes de zero..

Seja (v^*, u^*) o par de multiplicadores de Lagrange associados à solução x^*. Os multiplicadores (v^*, u^*) no *design* ótimo fornecem informações para responder à questão de sensibilidade.

---

[1] mialichjr@gmail.com
[2] antunes@ibilce.unesp.br

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0110

Para discutir as mudanças na função de custo devido as mudanças nos limites das restrições, consideramos o problema modificado de minimizar $f(x)$ sujeito às restrições

$$h_i(x) = b_i;\ i = 1, ..., p \ \text{ e } \ g_j(x) \leq e_j;\ j = 1, ..., m, \tag{1}$$

onde, b_i e e_j são pequenas variações próximas de zero.

Teorema 1.1. *Sejam $f(x)$, $h_i(x)$, $i = 1, ..., p$ e $g_j(x)$, $j = 1, ..., m$ diferenciáveis duas vezes. Seja x^* um ponto regular que, juntamente com os multiplicadores (v^*, u^*) satisfaz as Condições Necessárias de KKT e condições suficientes de segunda ordem.*

Se, para cada $g_j(x^*)$, é verdade que $u_j^* > 0$, temos que a solução $x^*(b, e)$ do problema modificado definido em (1) é uma função continuamente diferenciável em (b, e) em alguma vizinhança de $(0, 0)$. Além disso,

$$\frac{\partial f(x^*(0,0))}{\partial b_i} = -v_i^*;\ i = 1, ..., p \quad e \quad \frac{\partial f(x^*(0,0))}{\partial e_j} = -u_i^*;\ j = 1, ..., m. \tag{2}$$

Aplicando a expansão de Taylor de Primeira Ordem e usando (2) obtemos

$$f(b_i, e_j) = f(0, 0) - v_i^* b_i - u_j^* e_j. \tag{3}$$

Usando a Equação (3), para fazer uma mudança de primeira ordem δf na função de custo devido as pequenas alterações b_i e e_j, temos

$$\delta f^* = f(b_i, e_j) - f(0, 0) = -v_i^* b_i - u_j^* e_j. \tag{4}$$

Para valores dados b_i e e_j podemos estimar um novo valor da função de custo a partir da Equação (3). Se queremos mudar o lado direito das restrições, simplesmente incluímos eles na Equação (4) e obtemos a mudança na função de custo como

$$\delta f^* = -\sum_{i=1}^{p} v_i^* b_i - \sum_{j=1}^{m} u_j^* e_j \tag{5}$$

É interessante notar que, se as condições do Teorema 1 não estiverem satisfeitas, a existência das derivadas de (2), não estão descartadas pelo teorema. Ou seja, as derivadas podem existir, mas a sua existência não pode ser garantida pelo Teorema 1.

Agradecimentos

Agradeço ao IBILCE, a UNESP e ao meu orientador.

Referências

[1] J. S. Arora, Introduction to Optimum Design, Elsevier Academic Press, 2nd edition, (2004).

