Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 2, 2015.
Trabalho apresentado no III CMAC - SE, Vitória-ES, 2015.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

PM-pseudoinvexidade Livre

Fabiola Roxana Villanueva[1]
Departamento de Matemática Aplicada, UNESP, São José do Rio Preto, SP

Resumo. Este trabalho apresenta condições necessárias de otimalidade e uma nova condição suficiente de otimalidade. As condições neccesárias são apresentadas na forma do celebrado Príncipio do Máximo de Pontryagin. Na nova condição suficiente, todos os processos que satisfazem o Príncipio do Máximo com tempos finais livres são ótimos e, reciprocamente, os problemas de controle ótimo com tempos finais livres nos quais todo PM-processo[2] é ótimo necessariamente satisfazem nossa nova condição de otimalidade.

Palavras-chave. Princípio do Máximo, Tempo final livre, Convexidade generalizada.

1 Introdução

Uma estratégia para o controle de um satélite orbitando é o controle bang-bang, com base na eliminação do desvio da orientação do satélite de seu valor nominal em tempo livre. Os problemas de controle ótimo associados com evasão ou perseguição, escapar ou pegar no menor tempo o mais rápido possível são usualmente problemas de tempo livre. Assim encontrar condições de otimalidade para problemas de controle com tempos finais livres é bastante importante.

2 O Príncipio do Máximo

Muitas condições necessárias de otimalidade de primeira ordem são derivadas em [5]. O Princípio do Máximo é de nosso interés não só porque foi a primeira condição necessária de otimalidade desenvolvida de maneira satisfatória com restrições tipicamente encontradas em otimização dinâmica, mas também pelo papel importante que ele desenvolve na derivação de outras. A versão mais geral do Princípio do Máximo aplica-se aos problemas de controle ótimo com restrições gerais nos pontos finais e restrições dinâmicas expressas em termos de uma equação diferencial "não-suave" parametrizada por uma variável de controle. Assim podemos considerar o problema

[1]olita_villanueva@hotmail.com

[2]Dizemos que $([\bar{S},\bar{T}],\bar{x},\bar{u})$ é um *PM-processo* do $(PCTL)$, quando existem λ, p e r satisfazendo $(i)-(v)$ do Teorema 3.1 (ver mais abaixo).

de controle ótimo:

$$(P)\begin{cases}\text{Minimizar } g(x(S),x(T))\\ \text{s.a. arcos } x\in W^{1,1}([S,T];\mathbb{R}^n) \text{ e funções mensuráveis } u:[S,T]\to\mathbb{R}^m \text{ satisfazendo}\\ \dot{x}(t)=f(t,x(t),u(t)) \text{ para q.t. } t\in[S,T],\\ u(t)\in U(t) \text{ para q.t. } t\in[S,T] \text{ e},\\ (x(S),x(T))\in C,\end{cases}$$

onde $g:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ e $f:[S,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ são funções, $U:[S,T]\rightsquigarrow\mathbb{R}^m$ é uma multifunção não-vazia e, $C\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ é um conjunto fechado.

Definição 2.1. 1. Um *processo admissível* (x,u) está formado por uma função de controle u e um arco $x\in W^{1,1}([S,T];\mathbb{R}^n)$ o qual é uma solução à equação diferencial tal que $(x(S),x(T))\in C$.

2. $(\bar{x},\bar{u})$ é um *minimizador global em* $W^{1,1}$ se

$$g(\bar{x}(\bar{S}),\bar{x}(\bar{T}))\leq g(x(S),x(T))$$

para todo processo admissível (x,u).

3. Um processo admissível $(\bar{x},\bar{u})$ é um *minimizador local em* $W^{1,1}$ se existe $\delta>0$ tal que $g(\bar{x}(\bar{S}),\bar{x}(\bar{T}))\leq g(x(S),x(T))$ para todo processo admissível (x,u) que satisfaz

$$\|x-\bar{x}\|_{W^{1,1}}\leq\delta.$$

Notação: Denote por $\mathcal{H}:[S,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ a função Hamiltoniana não-maximizada para (P), definida por $\mathcal{H}(t,x,p,u)=p\cdot f(t,x,u)$.

Teorema 2.1. ***(O Princípio do Máximo)*** *Seja $(\bar{x},\bar{u})$ um minimizador local em $W^{1,1}$ para (P). Suponha que para algum $\delta>0$ as seguintes hipoteses são satisfeitas.*

(H1) *g é localmente Lipschitz contínua;*

(H2) *Para x fixo, $f(\cdot,x,\cdot)$ é $\mathcal{L}\times\mathcal{B}^m$ mensurável e existe uma função $\mathcal{L}\times\mathcal{B}^m$ mensurável $k:[S,T]\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ tal que $t\to k(t,\bar{u}(t))$ é integrável e, para q.t. $t\in[S,T]$,*

$$|f(t,x,u)-f(t,x',u)|\leq k(t,u)|x-x'|\,\forall\,x,x'\in\bar{x}(t))+\delta B^3\, e,\ u\in U(t);$$

(H3) *$Gr\,U$ é um conjunto $\mathcal{L}\times\mathcal{B}^m$ mensurável.*

Então existem $p\in W^{1,1}([S,T];\mathbb{R}^n)$ e $\lambda\geq0$ tais que

(i) $(p,\lambda)\neq(0,0)$*;*

(ii) $-\dot{p}(t)\in co\,\partial_x\mathcal{H}(t,\bar{x}(t),p(t),\bar{u}(t))$ *q.s.;*

[3] B denota a bola unitária em $\mathbb{R}^n$.

(iii) $(p(S), -p(T)) \in \lambda\, \partial g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) + N_C(\bar{x}(S), \bar{x}(T))$;

(iv) $\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) = \max_{u \in U(t)} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), u)$ *q.s.*

Agora se $f(t, x, u)$ e $U(t)$ são independentes de t. Então, além das condições da acima, existe uma constante r tal que

(v) $\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) = r$ *q.s.*

Observação 2.1. *∂ denota o subdiferencial limite e N o cone normal limite.*

Demonstração. Ver [5]. □

3 Condições Necessárias para problemas de controle ótimo com tempos finais livres

Pode-se encontrar condições necessárias para problemas de controle ótimo para tempos finais livres (ver [5]) onde a restrição dinâmica é expressa como uma inclusão diferenciável. Uma análise similar fornece condições necessárias para problemas com tempos finais livres, na forma de um príncipio do máximo, quando as dinâmicas são modeladas, por uma equação diferencial dependente do controle:

$$(PCTL) \begin{cases} \text{Minimizar}\, g(S, x(S), T, x(T)) \\ \text{s.a intervalos}\, [S, T], \text{arcos}\, x \in W^{1,1}([S, T]; \mathbb{R}^n)\, \text{e funções mensuráveis}\, u : [S, T] \to \mathbb{R}^m \,\text{t.q.} \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))\, \text{para q.t.}\, t \in [S, T], \\ u(t) \in U(t)\, \text{para q.t.}\, t \in [S, T]\, e, \\ (S, x(S), T, x(T)) \in C, \end{cases}$$

onde $g : \mathbb{R}^{1+n+1+n} \to \mathbb{R}$ e $f : [S, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ são funções dadas, $U : \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ é uma multifunção não-vazia e, $C \subset \mathbb{R}^{1+n+1+n}$ é um conjunto fechado, isto para enfatizar que os pontos finais do intervalo de tempo $[S, T]$ são agora variáveis de eleição.

Observação 3.1. *Derivamos condições que são satisfeitas não simplesmente por minimizadores para $(PCTL)$ mas por minimizadores locais $W^{1,1}$. Para clarificar exatamente que se entende por um "minimizador local $W^{1,1}$", em circunstâncias quando o intervalo de tempo $[S, T]$ é uma variável de eleição é útil e é aderido a:*
Identificar uma função $x : [S, T] \to \mathbb{R}^n$ com sua extensão á toda a reta por meio de uma extrapolação constante de valores finais à esquerda e direita. Por exemplo, dado $y \in \mathbb{R}^n$ e $t > T$, então $|y - x(t)| := |y - x(T)|$. Neste sentido, dado $x \in W^{1,1}([S, T]; \mathbb{R}^n)$ e $x' \in W^{1,1}([S', T']; \mathbb{R}^n)$, definimos:

$$\|x - x'\|_{L^\infty} \quad := \quad \|x_e - x'_e\|_{L^\infty},$$

onde x_e x'_e são as extensões definidas acima.

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0119

Definição 3.1. 1. Um *processo* admissível é uma a tripla $([S,T],x,u)$ onde $[S,T]$ é um intervalo, x é um elemento em $W^{1,1}([S,T];\mathbb{R}^n)$ e, u é uma função em $[S,T]$ mensurável que toma valores em $\mathbb{R}^m$ satisfazendo, para q.t. $t \in [S,T]$, $\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)),\ \ u(t) \in U(t)$ e $(S,x(S),T,x(T)) \in C$.

2. Um processo $([\bar{S},\bar{T}],\bar{x},\bar{u})$ admissível que satisfaz as restrições de $(PCTL)$ é dito a ser um *minimizador local em* $W^{1,1}$ se existe $\delta' > 0$ tal que $g(\bar{S},\bar{x}(\bar{S}),\bar{T},\bar{x}(\bar{T})) \leq g(S,x(S),T,x(T))$ para todo processo admissível $([S,T],x,u)$ e também tal que $d(([S,T],x),([\bar{S},\bar{T}],\bar{x})) \leq \delta'$, onde $d(\cdot)$ é a métrica:

$$d(([S,T],x),([S',T'],x')) := |S-S'|+|T-T'|+|x(S)-x'(S')|+\int_{S\wedge S'}^{T\vee T'} |\dot{x}_e(s)-\dot{x}'_e(s)|ds.$$

Teorema 3.1. ***(O Princípio do Máximo com tempos finais livres)*** *Seja* $([\bar{S},\bar{T}],\bar{x},\bar{u})$ *um minimizador local em* $W^{1,1}$ *para* $(PCTL)$. *Suponha que*

(H1) *g é localmente Lipschitz contínua;*

(H2) *Para x fixo, $f(\cdot,x,\cdot)$ é $\mathcal{L}\times\mathcal{B}^m$ mensurável e existem $\delta > 0$ e uma função $k : [\bar{S},\bar{T}]\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ tais que $t \to k(t,\bar{u}(t))$ é integrável e, para q.t. $t \in [\bar{S},\bar{T}]$,*

$$|f(t'',x'',u) - f(t',x',u)| \leq k(t,\bar{u}(t))|(t'',x'') - (t',x')|\,\forall\,(t'',x''),(t',x') \in (t,\bar{x}) + \delta B,$$

para q.t. $t \in [\bar{S},\bar{T}]$;

(H3) *$U(t) = U\,\forall\,t \in \mathbb{R}$ para algum conjunto de Borel $U \subset \mathbb{R}^m$.*

Então existem $p \in W^{1,1}([\bar{S},\bar{T}];\mathbb{R}^n)$, $r \in W^{1,1}([\bar{S},\bar{T}];\mathbb{R})$ e $\lambda \geq 0$ tais que

(i) $(p,\lambda) \neq (0,0)$;

(ii) $(\dot{r}(t),-\dot{p}(t)) \in co\,\partial_{t,x}\mathcal{H}(t,\bar{x}(t),p(t),\bar{u}(t))$ *para q.t.* $t \in [\bar{S},\bar{T}]$;

(iii) $(-r(\bar{S}),p(\bar{S}),r(\bar{T}),-p(\bar{T})) \in \lambda\,\partial g(\bar{S},\bar{x}(\bar{S}),\bar{T},\bar{x}(\bar{T})) + N_C(\bar{S},\bar{x}(\bar{S}),\bar{T},\bar{x}(\bar{T}))$;

(iv) $\mathcal{H}(t,\bar{x}(t),p(t),\bar{u}(t)) = \max_{u\in U}\mathcal{H}(t,\bar{x}(t),p(t),u)$ *para q.t.* $t \in [\bar{S},\bar{T}]$;

(v) $\mathcal{H}(t,\bar{x}(t),p(t),\bar{u}(t)) = r(t)$ *para q.t.* $t \in [\bar{S},\bar{T}]$.

Demonstração. Ver [5]. □

4 Condições Suficientes para problemas de controle ótimo com tempos finais livres

Nesta seção, uma noção de convexidade generalizada, a invexidade, vai ajudar a encontrar uma condição suficiente de otimalidade.

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0119

Definição 4.1. Dado $(t, x, u) \in [S, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ e $\alpha \in (0, 1)$ definimos $\Delta_\alpha f(t, x, u) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ como:

$$\Delta_\alpha f(t, x, u)(\xi) := \frac{f(t, x, u + \alpha\xi) - f(t, x, u)}{\alpha}.$$

Definição 4.2. Se g e $f(t, \cdot, u)$ são C^1, dizemos que o $(PCTL)$ é *PM-pseudoinvexo livre* se para cada par de processos admissíveis $([S, T], x, u), ([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}, \bar{u})$ do $(PCTL)$ tais que

$$g(S, x(S), T, x(T)) < g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T}))$$

existem $\eta = (\eta_1, \eta_2) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $\xi = (\xi_1, \xi_2) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ satisfazendo

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1(t) & = \xi_2(t), \\ \dot{\eta}_2(t) & = f_t(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\eta_1(t) + f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\eta_2(t) \\ & \quad +\Delta_\alpha f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(\xi_1(t)) + \xi_2(t) f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t) + \alpha\xi_1(t)) \end{cases} \tag{1}$$

para q.t $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$,

$$(\eta_1(\bar{S}), \eta_2(\bar{S}), \eta_1(\bar{T}), \eta_2(\bar{T})) \in T_C(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})), \tag{2}$$

$$(\bar{u}(t) + \alpha\xi_1(t), 1 + \alpha\xi_2(t)) \in U(t) \times [0.5, 1.5] \text{ para q.t. } t \in [\bar{S}, \bar{T}], \tag{3}$$

$$\nabla g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) \cdot (\eta_1(\bar{S}), \eta_2(\bar{S}), \eta_1(\bar{T}), \eta_2(\bar{T})) < 0, \tag{4}$$

$\forall\, \alpha \in (0, 1)$.

Observação 4.1. *Esta definição foi inspirada por* [2].

Observação 4.2. *T_C denota o cone tangente de Clarke ao conjunto C no ponto* $(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T}))$.

Lema 4.1. *Sejam $(\lambda, q) \in \{0, 1\} \times W^{1,1}([\bar{S}, \bar{T}]; \mathbb{R}^n)$ e $\alpha \in (0, 1)$ quaisquer. Seja $(\bar{x}, \bar{u})$ um processo admissível do $(PCTL)$ satisfazendo*

$$q(t) \cdot \Delta_\alpha f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))(v) \leq 0 \, \textit{para q.t. } t \in [\bar{S}, \bar{T}],$$

para todo $v \in \mathbb{R}^m$ tal que $\bar{u}(t) + \alpha v \in U(t)$ para q.t. $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$. Então, para q.t. $t \in [\bar{S}, \bar{T}]$,

$$\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), q(t), \bar{u}(t)) = \max_{u \in U(t)} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), q(t), u).$$

Demonstração. Ver [3]. □

Teorema 4.1. *Sejam g e $f(t, \cdot, u) \in C^1$. $(PCTL)$ é PM-pseudoinvexo livre então todo PM-processo normal é um processo ótimo.*

Demonstração. Seja $([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}, \bar{u})$ um PM-processo, em particular normal, qualquer do $(PCTL)$ e suponhamos que existe um proceso admissível $([S, T], x, u)$ tal que $g(S, x(S), T, x(T)) < g(\bar{S}, \bar{x}(\bar{S}), \bar{T}, \bar{x}(\bar{T}))$. Como $([\bar{S}, \bar{T}], \bar{x}, \bar{u})$ é um PM-processo normal, existem p, r e um escalar $\lambda = 1$ satisfazendo $(i) - (v)$. Como o $(PCTL)$ satisfaz a Definição 4.2, temos a existência de η, ξ satisfazendo $(1) - (4)$ o qual vai para um absurdo.

□

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0119

Teorema 4.2. *Sejam g e $f(t,\cdot,u) \in C^1$. Todo PM-processo é um processo ótimo então $(PCTL)$ é PM-pseudoinvexo livre.*

Demonstração. Procedamos por contradição, suponhamos que existem um par de processos admissíveis $([S,T],x,u)$, $([\bar{S},\bar{T}],\bar{x},\bar{u})$ do $(PCTL)$ satisfazendo

$$g(S,x(S),T,x(T)) < g(\bar{S},\bar{x}(\bar{S}),\bar{T},\bar{x}(\bar{T})) \qquad (**)$$

e um escalar $\alpha \in (0,1)$ tais que para qualquer par (η,ξ) temos que

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1(t) &= \xi_2(t), \\ \dot{\eta}_2(t) &= f_t(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))\eta_1(t) + f_x(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))\eta_2(t) \\ & \quad +\Delta_\alpha f(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))(\xi_1(t)) + \xi_2(t) f(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)+\alpha\xi_1(t)) \end{cases}$$

para q.t $t \in [\bar{S},\bar{T}]$,

$$\begin{aligned} &(\eta_1(\bar{S}),\eta_2(\bar{S}),\eta_1(\bar{T}),\eta_2(\bar{T})) \in T_C(\bar{S},\bar{x}(\bar{S}),\bar{T},\bar{x}(\bar{T})), \\ &(\bar{u}(t)+\alpha\xi_1(t), 1+\alpha\xi_2(t)) \in U(t)\times[0.5,1.5] \ \text{ para q.t. } t \in [\bar{S},\bar{T}] \end{aligned}$$

e

$$\nabla g(\bar{S},\bar{x}(\bar{S}),\bar{T},\bar{x}(\bar{T}))\cdot(\eta_1(\bar{S}),\eta_2(\bar{S}),\eta_1(\bar{T}),\eta_2(\bar{T})) \geq 0. \qquad (***)$$

Agora consideremos o problema de controle auxiliar

$$(PCA)\begin{cases} \text{Minimizar}\, \phi(\eta_1(\bar{S}),\eta_2(\bar{S}),\eta_3(\bar{T}),\eta_4(\bar{T})) = (\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)\cdot(\eta_1(\bar{S}),\eta_2(\bar{S}),\eta_3(\bar{T}),\eta_4(\bar{T})) \\ \text{s.a.} \\ (\dot{\eta}_1(t),\dot{\eta}_2(t)) = (\xi_2(t), f_t(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))\eta_1(t) + f_x(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))\eta_2(t) \\ \qquad\qquad +\Delta_\alpha f(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))(\xi_1(t)) + \xi_2(t) f(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)+\alpha\xi_1(t))) \\ \text{para q.t. } t \in [\bar{S},\bar{T}], \\ (\eta_1(\bar{S}),\eta_2(\bar{S})) \in \mathcal{K} := T_C(\bar{S},\bar{x}(\bar{S}),\bar{T},\bar{x}(\bar{T})), \\ \xi(t) = (\xi_1(t),\xi_2(t)) \in V_1(t)\times V_2(t) = V(t), \end{cases}$$

onde $V_1(t) := \{\xi_1 : \bar{u}(t)+\alpha\xi_1 \in U(t)\}, V_2(t) := \{\xi_2 : 1+\alpha\xi_2 \in [0.5,1.5]\}$ e $(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4) = \nabla g(\bar{S},\bar{x}(\bar{S}),\bar{T},\bar{x}(\bar{T}))$ para q.t. $t \in [\bar{S},\bar{T}]$. Claramente $(\bar{\eta},\bar{\xi}) = (0,0)$ é um processo admissível do (PCA) com $\phi(\bar{\eta}_1(\bar{S}),\bar{\eta}_2(\bar{S}),\bar{\eta}_3(\bar{T}),\bar{\eta}_4(\bar{T})) = 0$ e, $(\bar{\eta},\bar{\xi})$ é um processo ótimo do (PCA), pois se não existiría um processo admissível (η,ξ) do (PCA) tal que $\nabla g(\bar{S},\bar{x}(\bar{S}),\bar{T},\bar{x}(\bar{T}))\cdot(\eta_1(\bar{S}),\eta_2(\bar{S}),\eta_1(\bar{T}),\eta_2(\bar{T})) < 0$, o qual contradiz $(***)$. Logo pelo Teorema 1.1, existem $\lambda, p_2, -p_1$ tais que $([\bar{S},\bar{T}],\bar{x},\bar{u})$ é um PM-processo e, pela hipótese $([\bar{S},\bar{T}],\bar{x},\bar{u})$ é um processo ótimo, i.e., $g(\bar{S},\bar{x}(\bar{S}),\bar{T},\bar{x}(\bar{T})) \leq g(S,x(S),T,x(T))$ para cada processo admissível $(S,x(S),T,x(T))$, o qual contradiz $(**)$. $\square$

5 Conclusões

Apresentamos condições necessárias e suficientes de otimalidade para problemas de controle com tempos finais livres desde o estudo do Princípio do Máximo e a PM-pseudoinvexidade num contexto livre, porém há ainda muito trabalho por fazer.

Como trabalhos futuros, pode-se apresentar uma definição da PM-pseudoinvexidade livre com multiplicadores, para assim aplicar a problemas com um termo integral na função de custo. Também, seria atraente, obter condições suficientes de otimalidade para problemas de controle multiobjetivo com multiprocessos e tudo isso num contexto com tempo livre. Finalmente, pode-se obter condições necessárias e suficientes de segunda ordem para problemas de controle ótimo. As condições necessárias poderiam ser obtidas aplicando-se a generalização do formalismo de A. Ya. Dubovitskii e A. A. Milyutin (ver [1]) e as condições suficientes poderiam ser obtidas por meio das condições de convexidade generalizada de segunda ordem como fez Ivanov em [4] para problemas de programação matemática em dimensão finita.

Agradecimentos

Fabiola Roxana Villanueva agradece à UNESP e a SBMAC por permitir desenvolver este trabalho.

Referências

[1] A. Ben-Tal and J. Zowe, A unified Theory of First and Second Order Conditions for Extremum Problems in Topological Vector Spaces, vol. 19, 39-76, (1982).

[2] V.A. de Oliveira and G.N. Silva, New optimality conditions for nonsmooth control problems, J. Glob. Optim., vol. 57, 1465-1484, (2013).

[3] V.A. de Oliveira and G.N. Silva, On Suffient Optimality Conditions for Multiobjective Control Problems, Technical Report, (2014), to appear.

[4] V.I. Ivanov. Second-order Kuhn-Tucker invex constrained problems, vol. 50, 519-529, (2011).

[5] R.B. Vinter, Optimal Control, Springer Science+Business Media, vol. 5465, (2000).

