Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 2, 2015.
Trabalho apresentado no III CMAC - SE, Vitória-ES, 2015.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

MP-Pseudo-Invexidade em Problemas de Controle Ótimo com Condições de Contorno Funcionais

John Frank Matos Ascona[1]
Departamento de Matemática Aplicada, UNESP, São José do Rio Preto, SP
Lizet Santa Cruz Calderón[2]
Departamento de Matemática, UNESP, São José do Rio Preto, SP
Valeriano Antunes de Oliveira[3]
Departamento de Matemática Aplicada, UNESP, São José do Rio Preto, SP

Resumo. O propósito deste trabalho é propor condições suficientes de otimalidade para problemas de controle ótimo com condições de contorno funcionais envolvendo funções continuamente diferenciáveis, considerando a classe dos problemas $MP - pseudo - invexos$. Um exemplo ilustrando os resultados obtidos é apresentado.

Palavras-chave: Controle Ótimo, Condições de Otimalidade, MP-pseudo-invexidade.

1 Introdução

O principal objetivo deste trabalho é fornecer condições suficientes de otimalidade para problemas de controle ótimo com condições de contorno funcionais. Condições necessárias de otimalidade para problemas de controle ótimo são encontradas no Princípio Máximo de Pontryagin [6]. Este princípio envolve um conjunto de condições de primeira ordem que levam à caracterização dos candidatos a processos de controle ótimo, os chamados $MP-processos$. Naturalmente, um $MP-processo$ pode não ser ótimo. A fim de distinguir um processo de minimização entre os $MP-processos$, podemos recorrer, por exemplo, às condições de convexidade. As condições suficientes fornecidas neste trabalho vão nessa direção, são baseadas em um tipo de convexidade generalizada, chamado invexidade.

Algumas aplicações interessantes de invexidade podem ser encontradas em [2] e [5].

Considere o seguinte problema de controle ótimo com restrições de contorno funcionais:

[1]fjmatos19@gmail.com
[2]lizet1910@gmail.com
[3]antunes@ibilce.unesp.br

$$(PCF)\begin{cases}\text{Minimizar } g(x(S),x(T))\\ \text{Sujeito a}\\ \dot{x}(t)=f(t,x(t),u(t)) \quad q.s.,\\ u(t)\in U(t) \quad q.s.,\\ \phi_i(x(S),x(T))\le 0 \quad para \quad i=1,2,...,k_1,\\ \psi_j(x(S),x(T))=0 \quad para \quad j=1,2,...,k_2,\end{cases}$$

onde $g:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $f:[S,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, $\phi_i:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $i=1,2,...,k_1$, e $\psi_j:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $j=1,2,...,k_2$, $U:[S,T]\rightrightarrows\mathbb{R}^m$ é uma multifunção. Os tempos S e T são fixados. A variável de estado x é uma função absolutamente contínua de $[S,T]$ em $\mathbb{R}^n$ e a variável de controle u é uma função mensurável de $[S,T]$ em $\mathbb{R}^m$.

Diz-se que (x,u) é um processo de controle factível se as restrições de (PCF) são satisfeitas. Um processo de controle factível $(\bar{x},\bar{u})$ é dito ser um processo de controle ótimo se $g(\bar{x}(S),\bar{x}(T))\le g(x(S),x(T))$ para todos processos factíveis (x,u).

Em [3], [4] foi introduzida a classe de problemas $MP-pseudo-invexos$. Foi mostrado que em um problema $MP-pseudo-invexo$, todo $MP-processo$ é um processo ótimo. Ademais, foi mostrado que se tal propiedade é verdadeira, isto é, se todo MP-processo de um determinado problema é um processo ótimo, então tal problema é (necessariamente) um problema $MP-pseudo-invexo$. Tais resultados foram obtidos para problemas de controle com condições de contorno do tipo abstratos, i.e., do tipo $(x(S),x(T))\in C$, onde C é um conjunto fechado de $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$. Aqui, como pode ser visto acima, é tratado o caso em que C é descrito por meio de restrições funcionais. Destacamos que o conceito de $MP-pseudo-invexidade$ mantém as boas propriedades de convexidade, no sentido que as condições necessárias do princípio do máximo tornam-se também suficientes para otimalidade (como no caso de problemas convexos). Vale destacar ainda que todo problema convexo é também $MP-pseudo-invexo$. Ao final deste trabalho exibimos um exemplo de problema $MP-pseudo-invexo$ que não é convexo. Assim, vê-se que a classe de problemas convexos está contida propriamente na classe de problemas $MP-pseudo-invexos$. Além disso, a $MP-pseudo-invexidade$ é a condição mais geral possível que mantém a propriedade de suficiência do princípio do máximo, uma vez que mostramos que um problema de controle ótimo é $MP-pseudo-invexo$ se, e somente se, todo $MP-processo$ é um processo ótimo.

2 O Princípio do Máximo

Nesta seção vamos introduzir o Princípio do Máximo para problemas de controle ótimo com restrições de contorno funcionais.

Denota-se por $H:[S,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ a função Hamiltoniana maximizada

$$H(t,x,p,u):=p\cdot f(t,x,u).$$

Seja $(\bar{x},\bar{u})$ um processo de controle ótimo, com as seguintes hipóteses:

(H1) Para x fixo, $f(\cdot,x,\cdot)$ é $L\times B^m$ mensurável. Existe uma função $L\times B$ mensurável $k:[S,T]\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$, tal que $t\to k(t,\bar{u}(t))$ é integrável para $q.t.$ $t\in[S,T]$, satisfazendo

$$|f(t,x,u) - f(t,x',u)| \leq k(t,u)|x - x'| \qquad \forall x, x' \in \bar{x} + \delta B \quad e \quad u \in U(t);$$

(H2) $Gr(U)$ é um conjunto $L \times B^m$ mensurável;

(H3) $g, \phi_1, ..., \phi_{k_1}, \psi_1, ..., \psi_{k_2}$ são continuamente diferenciáveis;

(H4) Para cada $(t,u) \in [S,T] \times \mathbb{R}^m$, $f(t,\cdot,u)$ é continuamente diferenciável.

O Princípio do Máximo para (PCF) considerando-se as hipóteses acima, diz que existem $p \in W^{1,1}$, $\lambda \geq 0$, e $\alpha_i \geq 0$ para $i = 1, 2, ..., k_1$, e números β_j para $j = 1, 2, ..., k_2$, tais que:

$$-\dot{p}(t) = H_x(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) \quad \text{q.s.}, \tag{1}$$

$$H(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) = \max_{u \in U(t)} H(t, \bar{x}(t), p(t), u) \quad \text{q.s.}, \tag{2}$$

$$(p(S), -p(T)) = \lambda \nabla g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) + \sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i \nabla \phi_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) + \sum_{j=1}^{k_2} \beta_j \nabla \psi_j(\bar{x}(S), \bar{x}(T)), \tag{3}$$

$$\lambda + \|p\|_{L^\infty} + \sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i + \sum_{j=1}^{k_2} |\beta_j| \neq 0. \tag{4}$$

Quando existem λ, p, α_i, $i = 1, \ldots, k_1$, β_j, $j = 1, \ldots, k_2$, satisfazendo as condições acima diz-se que $(\bar{x}, \bar{u})$ é um $MP - processo$ de (PCF). Se $\lambda = 1$, diz-se que $(\bar{x}, \bar{u})$ é um $MP - processo\ normal$ e (PCF) diz-se ser *normal* em $(\bar{x}, \bar{u})$. diz-se que (PCF) é *normal*, se é *normal* em qualquer $MP - processo$ $(\bar{x}, \bar{u})$, caso contrário é *anormal*.

Maiores detalhes sobre o Princípio do Máximo aplicado a problemas de controle ótimo com restrições de contorno funcionais, incluindo sua demonstração, podem ser encontrados em [5]

3 Condições Suficientes de Otimalidade

Nesta seção daremos a definição de $MP - pseudo - invexidade$ para problemas de controle ótimo com condições de contorno funcionais. Incluímos também um exemplo ilustrativo.

Definição 3.1. *Sejam $(\bar{x}, \bar{u})$ um processo factível de (PCF) e $\alpha \in (0,1)$ um escalar. Define-se o conjunto das "direções α-factíveis" como sendo o conjunto de todos os pares $(\eta, \xi) : [S,T] \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ tais que*

$$\dot{\eta}(t) = f_x(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t)) \cdot \eta(t) + \Delta_\alpha f(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t))(\xi(t)) \quad q.s., \tag{5}$$

$$(\eta(S), \eta(T)) \in Q(\bar{x}(S), \bar{x}(T)), \tag{6}$$

$$\overline{u}(t) + \alpha \xi(t) \in U(t) \quad q.s., \tag{7}$$

onde

$$\Delta_\alpha f(t,x,u)(\xi) := \frac{f(t,x,u+\alpha\xi)-f(t,x,u)}{\alpha},$$
$$Q(\bar{x}(S),\bar{x}(T)) = \{v : \nabla\phi_i(\bar{x}(S),\bar{x}(T))\cdot v \le 0,\ i\in I(\bar{x}), \nabla\psi_i(\bar{x}(S),\bar{x}(T))\cdot v = 0,\ j\in J\},$$
$$I(\bar{x}) := \{i\in I : \phi_i(\bar{x}(S),\bar{x}(T)) = 0\},\ I := \{1,\ldots,k_1\},\ J := \{1,\ldots,k_2\}.$$

Denota-se por $\mathfrak{F}_\alpha(\bar{x},\bar{u})$ o conjunto de todas as "direções α-factíveis".

Agora podemos definir a $MP-pseudo-invexidade$ em termos de direções α-factíveis.

Definição 3.2. *Diz-se que (PCF) é $MP-pseudo-invexo$ se dado um par de processos factíveis $(x,u),(\bar{x},\bar{u})$ com $g(x(S),x(T)) < g(\bar{x}(S),\bar{x}(T))$, existem $(\eta,\xi)\in\mathfrak{F}_\alpha(\bar{x},\bar{u})$ satisfazendo*

$$\nabla g(\bar{x}(S),\bar{x}(T))\cdot(\eta(S),\eta(T)) < 0 \tag{8}$$

para todo $\alpha\in(0,1)$.

Teorema 3.1. *Se (PCF) é $MP-pseudo-invexo$, então cada $MP-processo\ normal$ é um processo ótimo.*

Demonstração. Seja $(\bar{x},\bar{u})$ um $MP-processo\ normal$. Por (1) e (3) tem-se que

$$-(p(S),-p(T))\cdot(\eta(S),\eta(T)) - \int_S^T \dot{p}(t)\cdot\eta(t)dt - \int_S^T H_x(t,\overline{x}(t),p(t),\overline{u}(t))\cdot\eta(t))dt$$
$$+\left[\nabla g(\bar{x}(S),\bar{x}(T)) + \sum_{i=1}^{k_1}\alpha_i\nabla\phi_i(\bar{x}(S),\bar{x}(T)) + \sum_{i=1}^{k_2}\beta_i\nabla\psi_i(\bar{x}(S),\bar{x}(T))\right]\cdot(\eta(S),\eta(T)) = 0,$$

de modo que

$$(p(S),-p(T))\cdot(\eta(S),\eta(T)) + \int_S^T \dot{p}(t)\cdot\eta(t)dt + \int_S^T H_x(t,\overline{x}(t),p(t),\overline{u}(t))\cdot\eta(t)dt$$
$$-\left[\sum_{i=1}^{k_1}\alpha_i\nabla\phi_i(\bar{x}(S),\bar{x}(T)) + \sum_{i=1}^{k_2}\beta_i\nabla\psi_i(\bar{x}(S),\bar{x}(T))\right]\cdot(\eta(S),\eta(T))$$
$$=\nabla g(\bar{x}(S),\bar{x}(T))\cdot(\eta(S),\eta(T)).$$

Suponha que existe um processo factível (x,u) de (PCF) tal que $g(x(S),x(T)) < g(\bar{x}(S),\bar{x}(T))$. Por (8) e da igualdade acima tem-se que

$$(p(S),-p(T))\cdot(\eta(S),\eta(T)) + \int_S^T \dot{p}(t)\cdot\eta(t)dt + \int_S^T H_x(t,\overline{x}(t),p(t),\overline{u}(t))\cdot\eta(t))dt$$
$$-\left[\sum_{i=1}^{k_1}\alpha_i\nabla\phi_i(\bar{x}(S),\bar{x}(T)) + \sum_{i=1}^{k_2}\beta_i\nabla\psi_i(\bar{x}(S),\bar{x}(T))\right]\cdot(\eta(S),\eta(T)) < 0. \tag{9}$$

Por outro lado, utilizando integração por partes tem-se que

$$(p(S), -p(T)) \cdot (\eta(S), \eta(T)) + \int_S^T \dot{p}(t) \cdot \eta(t) dt = -\int_S^T p(t) \cdot \dot{\eta}(t) dt. \tag{10}$$

Logo, por (5) segue que

$$\begin{aligned} -p(t) \cdot \dot{\eta}(t) = \quad & -H_x(t, \overline{x}(t), p(t), \overline{u}(t)) \cdot \eta(t) \\ & +(1/\alpha)[H(t, \overline{x}(t), p(t), \overline{u}(t)) - H(t, \overline{x}(t), p(t), \overline{u}(t) + \alpha\xi(t))]. \end{aligned} \tag{11}$$

Assim, tem-se por (10) e (11) que

$$\begin{aligned} & (p(S), -p(T)) \cdot (\eta(S), \eta(T)) + \int_S^T \dot{p}(t) \cdot \eta(t) dt + \int_S^T H_x(t, \overline{x}(t), p(t), \overline{u}(t)) \cdot \eta(t) dt \\ & - \left[\sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i \nabla \phi_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) + \sum_{i=1}^{k_2} \beta_i \nabla \psi_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \right] \cdot (\eta(S), \eta(T)) \\ & = \int_S^T (1/\alpha) \left[H(t, \overline{x}(t), p(t), \overline{u}(t)) - H(t, \overline{x}(t), p(t), \overline{u}(t) + \alpha\xi(t)) \right] \\ & \quad - \left[\sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i \nabla \phi_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) + \sum_{i=1}^{k_2} \beta_i \nabla \psi_i(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \right] \cdot (\eta(S), \eta(T)) \geq 0, \end{aligned}$$

contradizendo (9). Portanto $(\bar{x}, \bar{u})$ é um processo ótimo. □

Lema 3.1. *Sejam $(\bar{x}, \bar{u})$ um processo factível de (PCF) e um escalar $\alpha \in (0,1)$. Se para todo par $(\eta, \xi) \in \mathfrak{F}_\alpha(\bar{x}, \bar{u})$ tem-se que $\nabla g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \cdot (\eta(S), \eta(T)) \geq 0$ então $(\bar{x}, \bar{u})$ é um $MP-processo$ de (PCF).*

A demonstração pode ser encontrada em [1].

Teorema 3.2. *Se (PCF) é tal que cada $MP-processo$ normal é um processo ótimo, então (PCF) é um problema $MP-pseudo-invexo$.*

Demonstração. Suponha que (PCF) não é $MP-pseudo-invexo$. Então existe um escalar $\alpha \in (0,1)$ e um par de processos factíveis com $g(x(S), x(T)) < g(\bar{x}(S), \bar{x}(T))$, tais que para todo par $(\eta, \xi) \in \mathfrak{F}_\alpha(\bar{x}, \bar{u})$ tem-se $\nabla g(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \cdot (\eta(S), \eta(T)) \geq 0$. Utilizando o Lema 3.1 tem-se que $(\bar{x}(S), \bar{x}(T))$ é um $MP-processo$ de (PCF). Então, por hipótese, é um processo ótimo, contradizendo o fato que $g(x(S), x(T)) < g(\bar{x}(S), \bar{x}(T))$. Assim (PCF) é $MP-pseudo-invexo$. □

Exemplo 3.1. *Considere o seguinte problema de controle:*

$$(PC)\left\{\begin{array}{l} Minimizar\ g(x(0),x(1)) = \ln\sqrt{x(1)+1} \\ \quad Sujeito\ a \\ \dot{x}(t) = -x(t) + (u(t))^2 \quad q.s., \\ u(t) \in [0,1] \quad q.s., \\ x(0) = 0,\ -x(1) \leq 0. \end{array}\right.$$

Observe que (PC) não é convexo. Verificaremos que o problema (PC) *é* $MP - pseudo -$ *invexo.*

Sejam $(x,u),(y,v)$ *processos factíveis de* (PC) *tais que* $g(x(0),x(1)) < g(y(0),y(1))$. *Temos que*

$$\ln\sqrt{x(1)+1} < \ln\sqrt{y(1)+1} \Leftrightarrow x(1) < y(1).$$

Como $x(1) \geq 0$, *segue então que* $y(1) > 0$, *ou seja, a restrição* $\phi(y(0),y(1)) \leq 0$ *não é ativa no ponto* $(y(0),y(1))$. *Logo* $I(y) = \emptyset$, *assim,*

$$Q(y(0),y(1)) \;=\; \{\gamma = (\gamma_1,\gamma_2) : \gamma_1 = 0, \gamma_2 \in \mathbb{R}\}.$$

De $\dot{x}(t) = -x(t) + (u(t))^2, x(0) = 0$, *segue que* $x(t) = \displaystyle\int_0^t \exp(\tau - t)[u(\tau)]^2 d\tau$ *q.s..*

Como $x(1) < y(1)$, *obtemos*

$$\int_0^1 \exp(\tau-1)[u(\tau)]^2 d\tau < \int_0^1 \exp(\tau-1)[v(\tau)]^2 d\tau.$$

Logo, existe $E \subset [0,1]$, *com medida positiva, tal que* $u(t) < v(t)$, $t \in E$. *Tome*

$$\xi(t) = \left\{\begin{array}{ll} u(t) - v(t), & t \in E \\ 0, & t \in [0,1]\backslash E. \end{array}\right.$$

Seja $\alpha \in (0,1)$ *arbitrário. Temos que*

$$v(t) + \alpha\xi(t) = \left\{\begin{array}{ll} \alpha u(t) + (1-\alpha)v(t), & t \in E \\ 0, & t \in [0,1]\backslash E. \end{array}\right.$$

Daí, $v(t) + \alpha\xi(t) \in U(t) = [0,1]$ *q.s.* (*observe que* $U(t)$ *é convexo,* $u(t), v(t) \in U(t)$ *e* $\alpha \in (0,1)$). *Agora tome* $\eta(t)$ *tal que*

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{\eta}(t) = f_x(t,y(t),v(t))\eta(t) + \Delta_\alpha f(t,y(t),v(t))(\xi(t)) \quad q.s., \\ (\eta(0),\eta(1)) \in Q(y(0),y(1)), \end{array}\right.$$

ou seja,

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{\eta}(t) = -\eta(t) + (1/\alpha)[-y(t) + (v(t)+\alpha\xi(t))^2 + y(t) - (v(t))^2], \\ \eta(0) = 0 \quad e \quad \eta(1) \in \mathbb{R}. \end{array}\right.$$

Então

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \int_0^t \exp(\tau - t)[(v(\tau) + \alpha\xi(\tau))^2 - (v(\tau))^2] d\tau \\ &= \int_E \exp(\tau - t)[(\alpha u(\tau) + (1-\alpha)v(\tau))^2 - (v(\tau))^2)] d\tau. \end{aligned}$$

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0116

Como $u(t) < v(t)$, $t \in E$, *e* $\alpha \in (0,1)$, *temos que* $0 \leq u(t) < \alpha u(t) + (1-\alpha)v(t) < v(t)$, $t \in E$. *Portanto* $\eta(t) < 0$ *q.s.. Em particular,* $\eta(1) < 0$. *Deste modo,*

$$\nabla g(y(0), y(1)) \cdot (\eta(0), \eta(1)) = \left(0, \frac{1}{2(y(1)+1)}\right) \cdot (0, \eta(1)) = \frac{\eta(1)}{2(y(1)+1)} < 0,$$

pois $\eta(1) < 0$ *e* $y(1) > 0$. *Concluímos então que* (PC) *é* $MP - pseudo - invexo$.

4 Conclusões

Nossos resultados mostram que a $MP-pseudo-invexidade$ é uma condição suficiente de otimalidade para (PCF), no sentido de que se (PCF) satisfaz a Definição 3.2, então todo $MP-processo$ normal é um processo ótimo. Ademais, mostramos que se é verdadeira a propriedade de que todo $MP-processo$ normal de (PCF) é um processo ótimo, então (PCF) é $MP - pseudo - invexo$. Portanto, concluímos que a classe dos problemas de controle $MP-pseudo-invexos$ é a maior classe de problemas onde tal propriedade vale.

Referências

[1] J. F. M. Ascona, Condições de otimalidade para problemas de controle ótimo com condições de contorno funcionais, Dissertação de Mestrado em Matemática, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, UNESP - Univ. Estadual Paulista, (2015).

[2] Z. Kenan and T. Lok, Power control for uplink transmission with mobile users, IEEE Transactions on Vehicular Technology, vol. 60, 2117-2127, (2011).

[3] V. A. de Oliveira, G. N. Silva and M. A. Rojas-Medar, A class of multiobjective control problems, Optim. Control Appl. Meth., vol. 30, 77-86, (2009).

[4] V. A. de Oliveira and G. N. Silva, New optimality conditions for nonsmooth control problems, J. Glob. Optim., vol. 57, 1465-1484, (2013).

[5] M. Syed, P. Pardalos and J. Principe, Invexity of the minimum error entropy criterion, IEEE Signal Processing Letters, vol. 20, 1159-1162, (2013).

[6] R. B. Vinter, Optimal Control, Birkhäuser, Boston, 2000.

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0116