Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 2, 2015.
Trabalho apresentado no III CMAC - SE, Vitória-ES, 2015.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Notas sobre o Princípio de Saint-Venant

Joccitiel Dias da Silva[1]

Centro Tecnológico, Departamento de Tecnologia Industrial, UFES, Vitória, ES,

Resumo. Desde que foi publicado em 1853, o Princípio de Saint-Venant continua sendo motivo de várias pesquisas. Contra exemplos para a conjectura original elaborada por Saint-Venant já foram exibidos, e uma prova de que o Princípio vale dentro da teoria linear só foi conseguida por Toupin em 1965. O objetivo deste trabalho é fornecer à alunos de ciências exatas, uma visão histórica do Princípio de Saint-Venant.

Palavras-chave. Princípio de Saint-Venant, deformação elástica, equações diferenciais parciais.

1 Introdução

Alunos de ciências exatas em particular de engenharia e física, estão acostumados com a expressão: "*Pelo Princípio de Saint-Venant, etc...*" quando se estuda deformações longe da parte da fronteira de regiões, onde forças foram aplicadas.

Uma situação clássica é de uma barra de peso P em equilíbio horizontal, uma distribuição de forças que deixa a barra em equilíbio é uma força de intensidade P aplicada no centro da barra e agindo verticalmente para baixo, mais duas forças de intensidade P/2 aplicadas uma em cada extremidade e apontadas verticalmente para cima. Sem dúvida essa é "uma" configuração que deixa a barra em equilíbio horizontal, pois a resultante das forças agindo sobre a barra é igual a 0(zero), e o momento resultante também é 0(zero).

Usamos normalmente essa configuração pois o "*Princípio de Saint-Venant*" nos diz que podemos usar, mas surge imediatamente duas questões:

1. Qual é a distribuição correta, em outras palavras, qual é a solução exata do problema?

2. Qual é de fato o enunciado do "*Princípio de Saint-Venant*"?

Voltemos no tempo para observarmos que desde sua publicação em 1853 pela Academia de Ciências de Paris, o trabalho de Adhémar Jean-Claude Barre, Conde de Saint-Venant (1797-1886) [13], continua despertando o interesse de vários pesquisadores, e várias tentativas de se formular e demosntrar o Princípio de Saint-Venant foram tentadas. Na realidade, a conjectura original de Saint-Venant, a respeito do decaimento de deformações longe da

[1]joccitiel@yahoo.com.br

parte da fronteira onde as forças foram modificadas, foi concebida para ser aplicada somente a cilindros em equilíbrio sob ação de forças aplicadas nos extremos, dentro da teoria da elasticidade linear.

Boussinesq [1] em 1885 foi o primeiro a tentar uma formulação e uma prova rigorosa para a conjectura elaborada por Saint-Venant, elevando a conjectura original ao posto de "Princípio", e muitos textos até hoje apresentam Boussinesq como referência para a demonstração do Princípio de Saint-Venant. Entretanto, uma prova de que o resultado vale dentro da teoria linear só foi conseguida por Toupin [11] em 1965.

2 A Intuição Física e o Rigor Matemático

Adhémar Jean-Claude Barré, Conde de Saint-Venant, engenheiro civil e professor de Mecânica da École des Ponts et Chaussées, apresentou em 13 de Junho de 1853 à Academia de Ciências de Paris um vasto trabalho intitulado *Mémoire sur la torsion des prismes* [13]. Em 26 de Dezembro do mesmo ano, a comissão de quatro sócios da referida academia composta por Augustin Luis Cauchy (presidente), Jean Victor Poncelet, Guillaume Piobert e Gabriel Lamé (relator) com o objetivo de analisar a obra de Saint Venant, concluiu seu trabalho com vastos elogios à mesma.

Teve início então, segundo Gaetano Fichera, um dos capítulos mais sugestivos e estimulantes de toda a história da Mecânica e da Ciência das construções. Sugestivo porque o método proposto por Saint-Venant para a solução do problema considerado, se revelara de grande eficácia prática, e chegou a ser chamado *o milagre de Saint-Venant*. Estimulante, a Conjectura de Saint-Venant necessitava de uma justificativa para seu procedimento, e incentivou muitos estudiosos de Matemática, Mecânica e Ciências das Construções a tentarem uma demonstração rigorosa, que se tornou um grande desafio por mais de um século.

Clifford Truesdell em History of Classical Mechanics, 1976 [12] escreveu sobre Saint-Venant:

> *"...pela penetração do conceito, pela contribuição da chave do problema, e pela maneira prática de resolvê-lo, seu trabalho se apresenta como um dos supremos monumentos da mecânica..."*

Veremos a seguir a proposta feita por Saint-Venant para a solução do problema de deformação de um cilindro elástico, com forças de superfícies distribuídas sobre suas extremidades planas. Primeiramente vamos modelar o problema.

2.1 Deformação de um Cilindro Elástico

Consideremos em $\mathbb{R}^3$ um material elástico ocupando a região cilíndrica

$C = \{(x_1, x_2, x_3) | (x_1, x_2) \in A, -L \leq x_3 \leq L\}$ onde $A \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto, convexo, limitado e $L > 0$. Seja z tal que $-L \leq z \leq L$.

Definimos $S_z = \{(x_1, x_2, x_3) | (x_1, x_2) \in \overline{A}, x_3 = z\}$, a seção transversal de C em z. Nessa notação, S_L é a base superior, S_{-L} a base inferior, e $\partial_1 C = \partial C - (S_L \cup S_{-L})$ é a fronteira lateral do cilindro. Suponhamos a seguinte distribuiçãoo de forças agindo sobre o cilindro.

1. A superfície lateral $\partial_1 C$ é livre de tração.
2. As forças de corpo são nulas.
3. As bases S_L e S_{-L} estãoo sujeitas, respectivamente, às seguintes forças de superfície $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3)$ e $\boldsymbol{g} = (g_1, g_2, g_3)$.

Numa configuração de equilíbrio para C, o sistema total de forças agindo sobre ∂C deverá estar em equilíbrio, a força resultante e o momento resultante deverão ser nulos, e na ausência de forças de volume, obtemos as seguintes equações de equilíbrio,

$$\begin{aligned} \int_{S_L} \boldsymbol{f} dx_1 dx_2 + \int_{S_{-L}} \boldsymbol{g}\, dx_1 dx_2 = 0, \\ \int_{S_L} (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{f}) dx_1 dx_2 + \int_{S_{-L}} (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{g}) dx_1 dx_2 = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

admitindo que as integrais existam.

2.1.1 Problema em Elasticidade Linear

Denotaremos, por $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ o vetor deslocamento de um ponto genérico $\boldsymbol{x} \in C$. Por $e = [e_{ij}]$ o tensor de deformação infinitesimal (strain-tensor) definido pela equação

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),$$

e por $\tau = [\tau_{ij}]$ o tensor de tensão (stress-tensor).

Em elasticidade linear, para um corpo homogêneo e isotrópico, a relação entre o tensor de deformação infinitesimal e o tensor de tensão é dada pela equação $\tau_{ij} = \lambda\, e_{kk}\, \delta_{ij} + 2\mu\, e_{ij}$, conhecida como *Lei de Hooke*.

Sob a ação de $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$, temos que o estado de deformação de C na sua configuraçãoo de equilíbrio é obtida ver [7], resolvendo o seguinte problema de contorno:

$$\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} = 0 \quad \text{em} \quad C \tag{2}$$

$$\tau_{i3} = f_i \quad \text{sobre} \quad S_L \tag{3}$$

$$-\tau_{i3} = g_i \quad \text{sobre} \quad S_{-L} \tag{4}$$

$$\tau_{i1} n_1 + \tau_{i2} n_2 = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial_1 C \tag{5}$$

onde $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3)$ é o vetor normal externo num ponto regular genérico da ∂C, onde $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$ satisfazem as equações (1).

Da referência [2] temos que sob hipóteses convenientes de regularidade a respeito dos arcos que compõem ∂A e das forças $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$, a solução $\boldsymbol{u}$ do problema de valor na fronteira

(2), (3), (4) e (5) existe, é continuamente diferenciável em qualquer ponto regular da fronteira de C, e é analítica em C.

Devido à dificuldade de se resolver explicitamente o problema (2), (3), (4) e (5), Saint-Venant sugeriu uma aproximação que exigia somente a solução de problemas de Neuman bi-dimensionais para funções harmônicas na seção transversal A do cilindro.

2.2 Intuição Física - A Aproximação de Saint-Venant

Baseado na intuição física de que sob a ação das forças de superfície $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$, em cada fibra longitudinal do cilindro, somente tensões tangenciais paralelas ao eixo do cilindro (eixo - x_3) são sentidas, Saint-Venant procurou uma solução $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ do sistema diferencial (2), (3), (4) e (5) que satisfizessem as condições $\tau_{11} = \tau_{12} = \tau_{22} = 0$ em C, ou seja; procurou uma solução onde todas as outras tenções que não as citadas imediatamente acima, fossem igais a zero.

Assim, colocando

$$F_i = \int_{S_L} f_i dx_1 dx_2, \text{ e } M_i = \int_{S_L} V_i dx_1 dx_2, \text{ com } V = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{f},$$

concluiu que a aproximação $\boldsymbol{v}$ é determinada por F_1, F_2, F_3, M_1, M_2 e M_3.

Partindo destas premissas, Saint-Venant estudou, detalhadamente, ver [3], [4] e [13], deformações de C e obteve, basicamente, soluções aproximadas $\boldsymbol{v}$, de quatro classes de deformações. Extensão (compressão) simples, flexão uniforme, flexão não uniforme e torção.

2.2.1 A Conjectura de Saint-Venant

O que se quer saber, é se $\boldsymbol{v}$ a aproximação de Saint-Venant, que permite um estudo detalhado da deformação, é de fato uma boa aproximação de $\boldsymbol{u}$, a solução exata do problema (2), (3), (4) e (5).

E isso é o que foi conjecturado por Saint-Venant:

"... des forces, estatiquement équivalentes, ou ayant la même résultante et le même moment résultante, produisent les mêmes effets sur toute la longueur de solides, quel que soit leur mode d'application et de distribution, excepté tout auprés des endroits oú elles agissent, ou sur des portion à peine sensibles et dont on peut négliger de tenir compte..." [13].

2.3 Rigor Matemático

Responder a questão colocada imediatamente acima, consiste em demonstrar que a deformação correspondente à aproximação $\boldsymbol{v}$ de Saint-Venant, pode ser considerada igual à deformação correspondente à solução exata $\boldsymbol{u}$, longe das extremidades.

E uma maneira de demonstrar isto é definir $w_i = u_i - v_i$, e mostrar que o tensor de deformação

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right), \text{ é "desprezível" longe das extremidades.}$$

Podemos então apresentar a conjectura de outro modo, ou seja:

$|e(\boldsymbol{x})|$ *é "muito pequeno" no cilindro* C *exceto possivelmente naqueles pontos que estão próximos das extremidades* S_L *e* S_{-L}.

Várias experiências confirmaram a expectativa sugerida por Saint-Venant em muitos casos práticos, e a solução de Saint-Venant passou a ser considerada uma boa aproximação da solução do problema em qualquer seção transversal do cilindro, exceto aquelas próximas das extremidades.

Entretanto a conjectura carecia de uma formulação precisa e de uma demonstração rigorosa, e a "pequenez" de $|e(\boldsymbol{x})|$ necessitava ser melhor quantificada. Seu valor para qualquer $\boldsymbol{x} \in C$ depende das forças de superfície.

J.V. Boussinesq em 1885 [1], foi o primeiro a tentar uma formulação rigorosa, e elevou a conjectura ao posto de "Princípio". Muitos textos atribuem a Boussinesq a prioridade da demonstração do "Princípio de Saint-Venant", mas ele utilizou apenas corpos infinitos ocupando o semi-espaço $z > 0$, e sujeito somente a forças normais às suas fronteiras.

Zanaboni em 1937 [15] e [16], foi o primeiro a sugerir que a "pequenez"de $|e(x)|$ deveria ser medida não pontualmente, mas globalmente; utilizando para isso a energia elástica armazenada na parte do corpo longe das regiões na fronteira que estão sob tensão.

Em trabalho publicado em 1947 [8], Von Mises, utilizando o mesmo exemplo de Boussinesq, mostrou que se componentes tangenciais das forças aplicadas à fronteira $z = 0$ forem admitidas, o "Princípio de Saint-Venant" da maneira como formulado por Boussinesq, falha. Neste mesmo trabalho apresentou também uma formulação para o "Princípio de Saint-Venant". Mas não foi feita neste artigo uma demonstração global, utilizando as equações diferenciais fundamentais da teoria da elasticidade.

3 O Princípio de Saint-Venant

Somente em 1965, mais de um século depois da publicação do trabalho de Saint-Venant, e depois de tantas outras tentativas de demosntração do "Princípio de Saint-Venant", R.A. Toupin [11], apresentou a primeira prova rigorosa do "Princípio de Saint-Venant", para um corpo cilíndrico, dentro da teoria da elasticidade linear.

O resultado de Toupin de certa forma tinha sido antecipado por Zanaboni, entretanto sem uma prova convincente. E como veremos no teorema anunciado a seguir, apesar da sua grande importância, o trabalho de Toupin não respondeu satisfatoriamente à conjectura, porque havia restrições às forças agindo somente sobre uma das extremidades do cilindro.

Consideremos a região cilíndrica C do espaço tri-dimensional com a mesma notação da seção 2.1, mas agora com $0 \leq z \leq L$.

Definimos

$$C_z = \{(x_1, x_2, x_3) \in C \mid z \leq x_3 \leq L\} \;\text{ e }\; E(z) = \frac{1}{2}\int_{C_z} \tau_{ij}\, e_{ij}\, dx_1 dx_2,$$

onde $E(z)$ é a energia no cilindro $C(z)$.

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0128

Teorema 3.1. (*TOUPIN*) *Seja C um cilindro de comprimento L e seção transversal arbitrária, tendo apenas a extremidade S_0 sob tensão por um sistema de forças auto-equilibrado. Então a energia $E(z)$ armazenada no cilindro C_z que se encontra a uma distância z da extremidade S_0, satisfaz a equação $E(z) \leq E(0)\exp\left(-\frac{z-L}{\gamma(L)}\right)$ onde $E(0)$ é a energia total armazenada no cilindro C, e a constante $\gamma(L)$ depende da geometria e da natureza do cilindro.*

Finalmente em 1976, Gaetano Fichera usando a técnica de Toupin, apresentou uma prova satisfatória para o "Princípio de Saint-Venant", conforme teorema a seguir.

Teorema 3.2. (*FICHERA*) *Considere um cilindro de comprimento L e seção arbitrária, com ambas as extremidades sob tensão, cada uma por um sistema de forças auto-equilibrado. Então fixado $0 < p < L$, temos para $0 < z < L - p$ que a energia $E(z)$ do cilindro entre S_z e S_p satisfaz a desigualdade, $E(z) \leq E(L)\exp\left(-\frac{z+p-L}{\gamma(p)}\right)$ onde $\gamma(p)$ depende da geometria e da natureza do cilindro.*

As demonstrações podem ser encontrados o de Toupin em [11], e o de Fichera em [3].

Nos últimos anos, o estudo do Problema de Saint-Venant, assim chamada a investigação do decaimento espacial de soluções de equações diferenciais parciais com valores de contorno em analogia ao que foi feito por Saint-Venant, teve grande desenvolvimento. Visto que soluções explícitas de muitos problemas da elasticidade linear, e principalmente da elasticidade não linear não são conhecidas, argumentos qualitativos foram desenvolvidos para estimar esse decaimento. Dentro desta linha de pensamento o resultado obtido por R.A. Toupin em 1965 [11], conseguindo estimativas para o decaimento exponencial da energia num cilindro tri-dimensional em elasticidade linear é notável.

A partir de então, vários resultados utilizando argumentos semelhantes ao usado por Toupin foram alcançados, em particular, citamos o de J.K. Knowles em 1966 [10], para uma região plana não necessariamente convexa, ainda dentro da teoria da elasticidade linear.

Resultados semelhantes ao Princípio de Saint-Venant, dentro de uma teoria restrita da elasticidade não linear foram obtidos por vários pesquisadores, cito os trabalhos de Horgan e Payne [5, 6], Silva e Ferreira [9] todos sob a hipótese de pequenas deformações.

G.A. Yosifian em 1978 [14] considerou versões do Princípio de Saint-Venant envolvendo efeitos não lineares para fluidos. Uma versão do Princípio de Saint-Venant para problemas envolvendo dependência do tempo foi primeiramente sugerido por B.A. Boley em 1958.

A relação dos trabalhos publicados sobre o Princípio de Saint-Venant desde 1853 é imensa, e de certa forma os trabalhos citados impulsionaram a continuidade destes estudos.

Agradecimentos

À SBMAC pela oportunidade de apresentar para alunos um trabalho sobre a história do Princípio de Saint-Venant, Princípio que aparece em várias disciplinas que são cursadas na graduação.

Referências

[1] J. Boussinesq, Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et des mouvements des solides élastiques, Gauthier-Villars, Paris, (1885).

[2] G. Fichera, Existence Theorems in Elasticity, Handbuch der Physik, vol. a/2, Springer Verlag, 347–389, (1972).

[3] G. Fichera, Il principio di Saint-Venant: Intuizione dell'ingegnere e rigore del matematico, Rend. Mat. Serie VI, vol. 10, 1–24, (1977).

[4] G. Fichera, Remarks on Saint-Venant's Principle, Akademia Nauk, Moscow, 543–554, (1978). Reprinted in Rend. Mat. Serie VI, vol 12, 181–200, (1979).

[5] C. O. Horgan and L. E. Payne, On Saint-Venant's principle in finite anti-plane shear: an energy approach, Arch. Rational Mech. Anal., vol 109, 107–137, (1990).

[6] C. O. Horgan and L. E. Payne, A Saint-Venant principle for a theory of nonlinear plane elasticity, Quart. Appl. Math., Vol. 4, 641–675, (1992).

[7] L. I-Shih, Continuum Mechanics, Springer, Berlin-Heidelberg (2002).

[8] R. V. Mises, On Saint-Venant's principle, Bull. Ameri. Math. Soci., vol. 51, 555–562, (1945).

[9] J. D. Silva e J. A. Ferreira, O Princípio de Saint-Venant em elasticidade não linear, TEMA, vol. 05, 337–345, (2002).

[10] J. K. Knowles, On Saint-Venant's principle in the two-dimensional linear theory of Elasticity, Arch. Rational Mech. Anal., vol. 21, 1–22, (1966).

[11] R. A. Toupin, Saint-Venant's Principle, Arch. Rati. Mech. Anal., vol. 18, 83–96, (1965).

[12] C. Truesdel, History of Classical Mechanics, Die Natur. Springer Verlag, vol. 63, Part I, 53–62; Part II, 119–130, (1976).

[13] A. B. Saint-Venant, Mémoire sur la torsion des prismes, l'Academie des Sciences de l'Institut Impérial de France, vol. 14, 233–560, (1853).

[14] G. A. Yosifian, An analog of Saint-Venant's principle and the uniqueness of the solutions of the first boundary value problem for Stokes' system in domais with noncompact boundaries, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, vol. 242, 36–39, (1978).

[15] O. Zanaboni, Dimonstrazione generale del principio del De Saint-Venant, Atti Rendiconti Accademia dei Lincei, vol. 25(1), 117–121 (1937).

[16] O. Zanaboni, Valutazione dell'errore massimo cui dà luongo l'aplicazione del principio del De Saint-Venant, Atti Rendi. Accademia dei Lincei, vol. 25(1), 595–601 (1937).

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0128