

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Análise de estabilidade em problemas de três corpos utilizando o MEGNO

Alan Costa de Souza¹

Departamento de Ciência da Computação, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ

Juliana Vianna Valério²

Departamento de Ciência da Computação, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ

Leonardo Navarro de Carvalho³

Departamento de Matemática Aplicada, UFF, Niterói, RJ

Resumo. Dado que problemas de três corpos são, em geral, caóticos, é importante investigar indicadores de caos nessas situações. Este trabalho considera o indicador de caos *Mean Exponential Growth of Nearby Orbits* (MEGNO) e seu cálculo em duas situações. Uma delas tem motivação astronômica e é observável exatamente por ser estável. Na outra, apesar de ter solução periódica, esta é extremamente sensível a pequenas perturbações nas condições iniciais, como mostra o cálculo do MEGNO, indicando que a solução não é observável.

Palavras-chave. MEGNO, caos, problema de três corpos.

1 Introdução.

É claro o interesse em entender como corpos soltos no espaço, sujeitos somente às leis da natureza, se comportam ao longo do tempo. Por exemplo, se poderia prever a dinâmica do nosso sistema solar. Esse problema vem sendo investigado há mais de dois mil anos. Já no século XVII Kepler postula três leis que aproximam a dinâmica dos planetas orbitando em torno do Sol.

Com Newton foi possível descrever as equações governantes da dinâmica do problema, caso os corpos sejam considerados massas pontuais sujeitas às leis de Newton e à Lei da Gravitação Universal. Sob essas condições o problema é modelado por um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO's) de segunda ordem:

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{Gm_j(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1)$$

¹alancosta@ufrj.br. Bolsista CNPq durante esse trabalho

²juvianna@dcc.ufrj.br

³leonardoc@id.uff.br

onde \mathbf{r}_i e m_i são posição e massa do i -ésimo dentre N corpos e G a constante gravitacional. Dada uma condição inicial, que consiste da posição e velocidade de cada massa, a solução do sistema descreve a evolução da posição dos corpos ao longo do tempo. O modelo descreve bastante bem algumas situações. Nas situações mais simples, como é o caso de dois corpos, tem-se solução analítica. Em geral, uma solução numérica faz-se necessária para se aproximar a solução do sistema de EDO's.

É relevante entender não apenas a solução como também sua sensibilidade a pequenas perturbações. Portanto é importante investigar o quão estável é a solução obtida, especialmente em se tratando de soluções aproximadas provenientes de esquemas numéricos, nos quais instabilidades são adicionadas artificialmente ao sistema dinâmico. Um indicador clássico de caos, no sentido de sensibilidade a pequenas perturbações nas condições iniciais, é o Número Característico de Lyapunov, que representa a divergência exponencial de soluções inicialmente próximas. Maneiras de estimar o número de Lyapunov numericamente são através do *Fast Lyapunov Indicator* (FLI) [8] e do *Lyapunov Characteristic Number* (LCN) [7]. Mais recentemente [3] apresentaram o *Mean Exponential Growth of Nearby Orbits* (MEGNO), que de acordo com [7] consegue determinar se o sistema é caótico com tempo de simulação menor que o método LCN.

O trabalho [4] apresenta evidências das vantagens de um esquema simplético para resolver o sistema (1), uma vez que mantém a energia constante em média. Contudo, para o cálculo de um indicador de caos, resolve-se um sistema de equações de primeira ordem que não admite um esquema simplético, dado que não é um sistema hamiltoniano. Portanto o esquema escolhido, que resolve o sistema (1) e a estabilidade, via MEGNO, foi Runge-Kutta de quarta ordem.

O objetivo deste trabalho é apresentar o indicador MEGNO, ilustrando seu uso em duas situações. Em uma aplicação em astronomia [7], onde utiliza-se o MEGNO para o estudo da estabilidade do sistema planetário ν Andromidae, que consiste de uma estrela e dois planetas. Uma vez calculada a órbita, o MEGNO é calculado indicando a regularidade da solução.

A outra situação considerada é periódica contudo caótica, que é a trajetória em forma de oito [2], batizada dessa forma pela dinâmica realizada por três corpos de mesma massa e dispostos de forma simétrica cujas trajetórias, para condições iniciais específicas, coincidem e têm forma um oito. Nesse caso, o MEGNO indica a extrema sensibilidade da solução às condições iniciais.

2 O indicador MEGNO

Neste trabalho se considera o sistema (1) planar, ou seja, todos os corpos se movem no mesmo plano. Uma condição inicial é representada por um vetor $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^{4n}$, onde n é o número de corpos envolvidos: para cada corpo tanto sua posição quanto sua velocidade iniciais são descritas por vetores pertencentes ao mesmo plano. A solução do sistema é uma função vetorial $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{4n}$ do tempo, suas coordenadas representando posição e velocidade de todos os corpos. A ideia é entender a sensibilidade dessa solução $\mathbf{x}(t)$ a pequenas perturbações. Assim utiliza-se a aproximação de primeira ordem de uma

perturbação $\delta_0 \in \mathbb{R}^{4n}$: se $\mathbf{z}_s(t)$ é solução com condição inicial $\mathbf{x}_0 + s\delta_0$, define-se:

$$\delta(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{z}_s(t) - \mathbf{x}(t)}{s}.$$

Tal $\delta(t)$, um vetor tangente em $\mathbf{x}(t)$, é solução da equação variacional

$$\dot{\delta} = J\delta, \tag{2}$$

com condição inicial δ_0 , onde J é a matriz jacobiana do sistema de equações de primeira ordem obtido de (1) no vetor $\mathbf{x}(t)$ [4, 7, 8].

O MEGNO $y(t)$ é definido como

$$y(t) = \frac{2}{t} \int_0^t \frac{\dot{\delta}(s)}{\delta(s)} s ds, \tag{3}$$

onde $\delta = |\delta(t)|$, é a norma do vetor tangente à órbita. A presença do fator s multiplicando $\frac{\dot{\delta}(s)}{\delta(s)}$ na integral em (3) implica que o MEGNO $y(t)$, para $t \rightarrow \infty$, valoriza o comportamento assintótico de $\delta(s)$.

3 Exemplos analíticos do MEGNO.

Nessa seção relaciona-se o crescimento do MEGNO e do δ em alguns casos particulares. Em geral não é possível calcular o MEGNO de forma analítica e recorre-se a métodos numéricos, que serão discutidos na próxima subseção.

3.1 Norma do vetor tangente com crescimento polinomial e exponencial.

Seja $\delta(t)$ o vetor perturbação tangente ao longo da solução e $\delta(t)$ sua norma. Supondo a situação em que o MEGNO $y(t) = \frac{2}{t} \int_0^t \frac{\dot{\delta}(s)}{\delta(s)} s ds = k$, com k constante, $\forall t > 0$:

$$\frac{2}{t} \int_0^t \frac{\dot{\delta}(s)}{\delta(s)} s ds = k \Rightarrow 2 \int_0^t \frac{\dot{\delta}(s)}{\delta(s)} s ds = kt \Rightarrow 2 \frac{\dot{\delta}(t)}{\delta(t)} t = k \Rightarrow \frac{\dot{\delta}(t)}{\delta(t)} = \frac{k}{2t},$$

integrando dos dois lados, $\ln(\delta(t)) = \frac{k}{2} \ln(t) + c \Rightarrow \delta(t) = a t^{\frac{k}{2}}$ com c e a constantes.

No caso em que o MEGNO $y(t) = 2$ o crescimento de $\delta(t)$ é linear, considerado regular. Segundo [3] quando $y(t)$ tende a 2 o $\delta(t)$ tende à divergência linear e o sistema é regular.

Considerando agora o caso em que $y(t) = \frac{2}{t} \int_0^t \frac{\dot{\delta}(s)}{\delta(s)} s ds = \lambda t$, com λ constante, se obtém:

$$\frac{2}{t} \int_0^t \frac{\dot{\delta}(s)}{\delta(s)} s ds = \lambda t \Rightarrow \int_0^t \frac{\dot{\delta}(s)}{\delta(s)} s ds = \lambda \frac{t^2}{2} \Rightarrow \frac{\dot{\delta}(t)}{\delta(t)} t = \lambda t \Rightarrow \frac{\dot{\delta}(t)}{\delta(t)} = \lambda,$$

integrando, $\ln(\delta(t)) = \lambda t + c \Rightarrow \delta(t) = ae^{\lambda t}$, com c e a constantes. O MEGNO $y(t)$ com crescimento linear implica em $\delta(t)$ com crescimento exponencial. Segundo [3] mesmo

quando o $y(t)$ tende a um crescimento linear o $\delta(t)$ tende à divergência exponencial. Esse caso é considerado caótico. Define-se o número característico de Lyapunov do sistema como $\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{t}$.

4 Abordagem numérica do MEGNO.

Como mencionado na seção anterior, em geral não é possível, ou pelo menos é difícil, calcular o MEGNO de forma analítica, por isso faz-se uso de métodos numéricos para seu cálculo. Nessa seção serão apresentadas duas abordagens para o cálculo do MEGNO: o método de Gozdziwski e o método de Breiter.

4.1 Método de Gozdziwski.

O método de Gozdziwski é apresentado em [7]. Consiste em substituir a formulação apresentada na equação (3) pelo sistema

$$\dot{v} = \frac{\dot{\delta} \cdot \delta}{\delta \cdot \delta} t \quad \text{e} \quad \dot{w} = 2 \frac{v}{t}. \quad (4)$$

Após obter o valor das variáveis auxiliares v e w em cada instante de tempo, obtém-se o MEGNO através de

$$y(t) = \frac{2v(t)}{t} \quad (5)$$

Numericamente o que se faz é resolver um sistema acoplado. Inicialmente transforma-se o sistema (1) em um sistema de primeira ordem nas variáveis posição e velocidade dos corpos. Resolve-se com o mesmo esquema numérico também o sistema (2), que descreve δ , e ainda o sistema (4) para encontrar o MEGNO $y(t)$ através de (5). Ao final de cada passo tem-se a posição, velocidade, δ , e MEGNO no instante atual.

4.2 Método de Breiter.

O método de Breiter é apresentado em [1]. Diferentemente do método anterior, o método utiliza uma fórmula analítica para o cálculo do MEGNO em cada passo. A fórmula é a seguinte:

$$y(n) = \left(\frac{n-1}{n} \right) y(n-1) + 2 \ln \left(\frac{\delta(n)}{\delta(n-1)} \right).$$

onde $\delta(n)$ é a norma de δ no instante n .

Em cada instante calculam-se as equações de movimento e as equações que determinam o δ , aplica-se o resultado nas fórmulas de Breiter para obter o valor do MEGNO.

Tabela 1: Dados sistema v Andromidae.

Dados	massa(M_J)	a(AU)	Período(dia)	e	Ω (graus)	ω (graus)	M(graus)
planeta C	10^{-5}	0,8282	242	0,3478	0	248,21	123,13
planeta D	10^{-5}	2,5334	1269	0,2906	0	242,99	354,78

5 Exemplos Numéricos do MEGNO.

5.1 MEGNO para o problema de três corpos regular.

Nessa seção mostra-se um exemplo de sistema de três corpos que não é caótico. O sistema é constituído por uma estrela da constelação de Andrômeda, a v Andromidae, cuja massa é $1,3 M_{\odot}$ (massa do Sol), e dois de seus planetas, denominados planeta C e planeta D, com massas da ordem de $10^{-5} M_J$ (massa de Júpiter).

As características dos planetas e suas órbitas foram extraídos de [7], e estão resumidos na Tabela 1. Os dados estão em elementos orbitais, que são a excentricidade da órbita (e), o semi-eixo maior da órbita (a) em unidades astronômicas (AU), a anomalia média (M), a longitude do nó ascendente (Ω) e o argumento do periélio (ω).

As condições iniciais em coordenadas cartesianas de posição e momento são resumidas na Tabela 2. Lembrando que o momento \mathbf{p} de um corpo é o produto de sua massa pela velocidade $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$.

Tabela 2: Coordenadas cartesianas do sistema v Andromidae.

	$r_x(UA)$	$r_y(UA)$	$p_x(M_{\odot}UA/dia)$	$p_y(M_{\odot}UA/dia)$
planeta C	0.82472	0.63045	-0.0065×10^{-5}	0.0152×10^{-5}
planeta D	-1.08302	-1.44178	0.0136×10^{-5}	-0.0094×10^{-5}

A seguir resolveu-se o sistema numericamente com as condições iniciais mencionadas anteriormente para um período de 10^3 períodos característicos do sistema, o que equivale a 10^3 períodos do planeta mais externo ($1,296 \cdot 10^6$ dias), pelo método de Breiter. Na Figura 1 exhibe-se o resultado para um vetor perturbação δ_0 aleatório. Do gráfico vê-se que $y(t)$ converge para 2, indicando que o sistema não é caótico. Os resultados estão de acordo com [7].

5.2 MEGNO para um problema de três corpos caótico.

Nessa subseção será mostrado um problema de três corpos caótico. O problema apresentado é o da *trajetória em forma de oito* [2], ou *Figura Oito*, mais brevemente. O programa utiliza uma malha de 2^{22} pontos, condições iniciais apresentadas na Tabela 3 e foi executado para um tempo de simulação total de aproximadamente 10^4 períodos característicos do sistema, como é recomendado em [3]. Na Figura 2 é exibida a órbita comum aos três corpos obtida, enquanto que o gráfico do MEGNO é exibido na Figura 3.

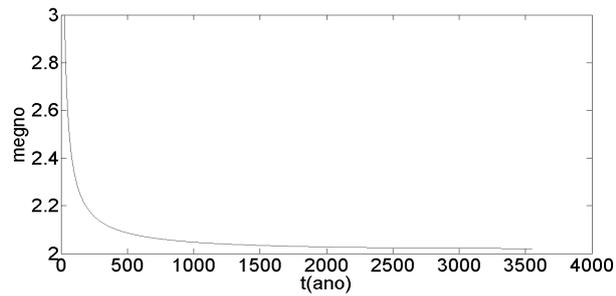


Figura 1: MEGNO v Andromidae 1.

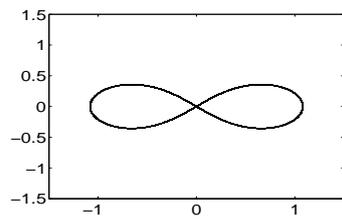


Figura 2: Solução numérica do Figura Oito.

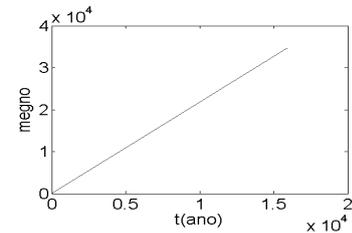


Figura 3: MEGNO do Figura Oito.

Percebe-se que o gráfico na Figura 3 é uma reta, $y(t)$ com crescimento linear, indicando caoticidade. Pode-se estimar o número característico de Lyapunov através da equação $\lambda = \frac{y(t)}{t}$.

Tabela 3: Condições iniciais da estrela tripla.

	Estrela 1	Estrela 2	Estrela 3
massa (M_{\odot})	1.000000	1.000000	1.000000
x(UA)	0.970043	-0.970043	0.000000
y(UA)	-0.243087	0.243087	0.000000
p_x (M_{\odot} UA/ano)	0.466203	0.466203	-0.932407
p_y (M_{\odot} UA/ano)	0.432365	0.432365	-0.864731

6 Conclusão

O MEGNO já vem sendo bastante usado desde sua concepção [3] na comunidade de astronomia. Os trabalhos [1, 4, 7, 8] são apenas alguns exemplos da vasta literatura aplicando o MEGNO para captar a caoticidade de sistemas planetários.

É interessante perceber que o sistema de trajetória em forma de oito, situação conhecida periodicamente para condições iniciais bem específicas apresentadas em [2], apresenta MEGNO indicando caoticidade. Nesse trabalho verificou-se que, apesar de periódica, essa configuração é instável. Portanto não observável. Como exemplo foram feitos dois vídeos

com o programa numérico utilizado no trabalho:

Video 1: <https://www.youtube.com/watch?v=eAsVLotGEUw> mostra a solução numérica da configuração periódica.

Video 2: <https://www.youtube.com/watch?v=MmoBwLS8CQQ> uma solução com condições iniciais ligeiramente perturbadas, em que se perde periodicidade.

Referências

- [1] S. Breiter and B. Melendo and P. Bartczak and I. Wytrzyszczak, Synchronous motion in the Kinoshita problem application to satellites and binary asteroids, *Astronomy and Astrophysics*, vol. 437, 753–764, (2005).
- [2] A. Chenciner and R. Montgomery, A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses, *Annals of Mathematics*, vol. 152, 881–901, (2000).
- [3] P. M. Cincotta and C. Simó, Simple tools to study global dynamics in non-axisymmetric galactic potentials - I, *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*, vol. 147, 205–228, (2000).
- [4] A. C. de Souza, *Análise Numérica da Dinâmica e Estabilidade dos problemas de dois e três corpos*, dissertação de mestrado, Programa de Pós Graduação em Informática – Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2014.
- [7] K. Goździewski and E. Bois and A. J. Maciejewski and L. Kiseleva-Eggleton, Global dynamics of planetary systems with the MEGNO criterion, *Astronomy and Astrophysics*, vol. 378, 569–586, (2001).
- [8] M. F. Mestre and P. M. Cincotta and C. M. Giordano, Analytical relation between two chaos indicators: FLI and MEGNO, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, vol. 414, L100–L103, (2011).