Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Síntese de Controladores Estruturados Robustos a Incertezas Mistas

Eduardo Felipe Mendonça de Menezes[1]
Paulo César Pellanda[2]
Alberto Mota Simões[3]
Departamento de Engenharia Elétrica, IME, Rio de Janeiro, RJ

Resumo. Apresenta-se uma nova técnica de projeto de controladores sujeitos a restrições estruturais e robustos a incertezas tanto paramétricas quanto dinâmicas. A ferramenta proposta baseia-se no valor singular estruturado (μ) e representa uma extensão para o caso de incertezas mistas de uma técnica de síntese-μ real via otimização não-diferenciável introduzida recentemente. Ao oferecer certificado de otimalidade e permitir a imposição de restrições estruturais ao controlador, a abordagem não-diferenciável permite superar importantes limitações da popular iteração D, G-K.

Palavras-chave. síntese-μ mista, otimização não-diferenciável, robustez, controle estruturado

1 Introdução

O valor singular estruturado (μ) é uma reconhecida ferramenta de análise de robustez de sistemas incertos [8]. Já quanto ao emprego de μ para a síntese de controladores robustos, por outro lado, o conjunto de técnicas disponíveis para a chamada síntese-μ é bem mais restrito, especialmente se for considerado o caso mais geral de incertezas mistas.

Dentre as técnicas de síntese-μ mista propostas na literatura, a iteração D, G-K [7] é uma das mais populares, apesar de apresentar importantes limitações. Primeiramente, a técnica não oferece nenhum certificado de otimalidade. Além disso, por ser baseada em uma síntese H_∞ de ordem plena, a iteração D, G-K tende a fornecer controladores não-estruturados de ordem elevada. Consequentemente, torna-se geralmente mandatório o emprego *a posteriori* de uma técnica de redução de ordem.

A técnica de síntese-μ via otimização não-diferenciável introduzida recentemente em Apkarian [1] permite superar as duas limitações indicadas acima da iteração D, G-K. Além de oferecer certificado de otimalidade local, a técnica permite que restrições estruturais sejam previamente impostas sobre o controlador.

[1]eduardofelipemenezes@gmail.com
[2]pcpellanda@ieee.org
[3]simoes@ime.eb.br

Neste trabalho, a técnica de síntese-μ introduzida por Apkarian [1] para o caso paramétrico é estendida para o caso mais geral de incertezas mistas. Como demonstrado pelo exemplo numérico apresentado, a nova formulação permite que se supere as supracitadas limitações da iteração D, G-K também no caso da síntese-μ mista.

Notação. Para uma matriz $X \in \mathbb{C}^{k \times k}$ qualquer, X^H denota sua hermitiana, $\mathrm{herm}(X) \triangleq X + X^H$ denota sua porção hermitiana, e $\mathrm{sherm}(X) \triangleq X - X^H$ denota sua porção anti-hermitiana. Para duas funções de transferência $G(s)$ e $T(s)$ quaisquer, a notação $G(s) \star T(s)$ denota a Transformação Linear Fracionária [8] entre elas. A notação $\mathcal{N}_s$ denota a matriz dada por

$$\mathcal{N}_s \triangleq \begin{bmatrix} I & -\sqrt{2}I \\ \sqrt{2}I & -I \end{bmatrix}.$$

2 Uma nova condição de estabilidade robusta

Figura 1: Forma padrão para (a) análise-μ e (b) síntese-μ

Considere a interconexão na Figura 1.a, representando um dado sistema incerto. Nesse conhecido quadro de trabalho, o bloco $\Delta(s)$ concentra todas as incertezas afetando o sistema, tais como incertezas paramétricas e dinâmicas negligenciadas ou não-modeladas. A matriz de transferência $M(s)$, por sua vez, representa o modelo nominal do sistema.

Sejam M e Δ os valores de $M(j\omega)$ e $\Delta(j\omega)$, respectivamente, calculados em uma dada frequência ω. A estrutura do bloco de incertezas consiste em uma informação chave na análise de robustez baseada na representação $M - \Delta$ acima. Seja, então, a definição padrão de uma estrutura bloco-diagonal geral:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Delta} \triangleq \big\{\Delta = \mathrm{diag}(\delta_1^r I_{k_1}, \ldots, \delta_{m_r}^r I_{k_{m_r}}, \delta_{m_r+1}^c I_{k_{m_r+1}}, \ldots, \delta_1^c I_{k_{m_r+m_c}}, \Delta_1^C, \ldots, \Delta_{m_C}^C) \\ : \delta_i^r \in \mathbb{R}, \delta_i^c \in \mathbb{C}, \Delta_i^C \in \mathbb{C}^{k_{m_r+m_c+i} \times k_{m_r+m_c+i}} \Big\}.\end{aligned}$$

Tipicamente, os escalares reais δ_i^r estão associados a incertezas paramétricas enquanto que os escalares complexos δ_i^c e blocos cheios complexos Δ_i^C representam dinâmicas não-modeladas ou negligenciadas. O inteiros m_r, m_c e m_C denotam o número de escalares reais repetidos, escalares complexos repetidos e blocos complexos cheios, respectivamente.

DOI: 10.5540/03.2016.004.01.0018

Define-se, também, a bola unitária

$$\mathbf{B\Delta} = \{\Delta(s) : \Delta(j\omega) \in \mathbf{\Delta}, \|\Delta(s)\|_\infty \leq 1\}.$$

Considere, agora, o seguinte teste de robustez em estabilidade baseado em um limitante superior para μ [1, 5]: se existir uma transferência $W(j\omega)$ tal que, $\forall\omega \in \mathbb{R}$,

$$\overline{\sigma}\left(\mathcal{N}_s \star W(j\omega)(\mathcal{N}_s \star M(j\omega))\right) < 1, \tag{1}$$

$$\overline{\sigma}\left(\mathcal{N}_s \star W(j\omega)\right) < 1, \tag{2}$$

$$W(j\omega)\Delta(j\omega) = \Delta(j\omega)W(j\omega), \tag{3}$$

$$\mathrm{sherm}(W_i(j\omega)) = 0, \quad i = m_r + 1, \ldots, m_r + m_c + m_C \tag{4}$$

então o sistema incerto da Figura 1.a será estável para todo $\Delta(s) \in \mathbf{B\Delta}$.

Note que no caso particular do problema tratado em Apkarian [1] da robustez em estabilidade a incertezas paramétricas, a restrição hermitiana (4) torna-se irrelevante. Já para o caso mais geral de incertezas mistas considerado aqui, porém, tal restrição deve ser considerada, tornando o problema ainda mais complexo.

Sabe-se que a condição de comutatividade (3) pode ser satisfeita automaticamente através da simples parametrização adequada do multiplicador. Analogamente, uma parametrização adequada do multiplicador permite que se satisfaça automaticamente a condição hermitiana (4). Há, portanto, a necessidade de se construir uma nova parametrização para o multiplicador W que satisfaça as restrições (3)-(4).

Considere, então, os conjuntos

$$\mathbf{W}_r \triangleq \left\{W_r = \mathrm{diag}(W_1, \ldots, W_{m_r}) : W_i \in \mathbb{C}^{k_i \times k_i}\right\}, \tag{5}$$

$$\mathbf{D}_c \triangleq \left\{D_c = \mathrm{diag}(D_1, \ldots, D_{m_c}, d_1 I, \ldots, d_{m_C} I) : D_i \in \mathbb{C}^{k_i \times k_i}, d_i \in \mathbb{C}\right\}. \tag{6}$$

Seja W dado por

$$W = \mathrm{diag}(W_r, D_c^H D_c), \quad W_r \in \mathbf{W_r}, D_c \in \mathbf{D_c}, \tag{7}$$

Não é difícil verificar que as condições (3)-(4) são satisfeitas para multiplicadores com a parametrização em (7). A partir dessa nova parametrização do multiplicador, obtém-se uma nova condição de estabilidade robusta a incertezas mistas, apresentada no teorema a seguir.

Theorem 2.1. *O sistema incerto da Figura 1.a é estável para todo $\Delta(s) \in \boldsymbol{B\Delta}$ se existirem $W_r(j\omega)$ e $D_c(j\omega)$ de estrutura (5) e (6), respectivamente, tais que, $\forall\omega \in \mathbb{R}$,*

$$\overline{\sigma}\left(\mathcal{N}_s \star W_r(j\omega)\right) < 1, \tag{8}$$

$$\overline{\sigma}\left(\mathcal{N}_s \star \left(diag(W_r(j\omega), D_c(j\omega))(\mathcal{N}_s \star P(j\omega) \star K(j\omega))\, diag(I, D_c^{-1}(j\omega))\right)\right) < 1. \tag{9}$$

Demonstração. Partindo-se da condição de estabilidade robusta (1)-(4), já foi indicado que as restrições (3)-(4) são satisfeitas em virtude da parametrização (7) adotada para o multiplicador. Com a nova parametrização, a condição (2) de positividade real também é satisfeita para aqueles blocos de W associados a incertezas complexas, de modo que a condição (2) reduz-se a (8).

Sabe-se que uma matriz quadrada X é positiva real, isto é, herm $(X) > 0$, se e somente se [6]

$$\overline{\sigma}((I - X)(I + X)^{-1}) < 1. \tag{10}$$

Assim, a condição (1) na verdade é equivalente a [1,5]

$$\text{herm}\,(W(\mathcal{N}_s \star M)) > 0. \tag{11}$$

Na equivalência acima, foi usado o fato de que $(I - X)(I + X)^{-1} = \mathcal{N}_s \star X$. Agora, se uma transformação de congruência com a matriz $\text{diag}(I, D_c^{-1})$ é aplicada à condição (11), obtém-se

$$\text{herm}\left(\text{diag}(W_r, D_c)(\mathcal{N}_s \star M)\text{diag}(I, D_c^{-1})\right) > 0. \tag{12}$$

Finalmente, a condição (9) pode ser obtida a partir da inequação acima utilizando-se a transformação bilinear em (10). □

Note que é possível se determinar um limitante superior para μ via um simples mecanismo de busca por bisseção a partir da combinação do resultado no Teorema 2.1 com um reescalonamento do canal de incertezas [1].

3 Síntese-μ mista de controladores estruturados

É possível obter-se uma ferramenta de síntese-μ a partir da aplicação da condição de estabilidade robusta do Teorema 2.1 ao sistema incerto representando na Figura 1.b, originado da interconexão de uma dada planta de síntese incerta $\mathcal{G}(s) \triangleq \Delta(s) \star P(s)$ com o controlador $K(s)$ a ser sintetizado. O problema de síntese-μ considerado pode, então, ser formulado como a busca de um controlador $K(j\omega)$ e de multiplicadores $W_r(j\omega)$, $D_c(j\omega)$ tais que, $\forall\omega \in \mathbb{R}$, as restrições (8)-(9) sejam satisfeitas com $M(j\omega) = P(j\omega) \star K(j\omega)$.

O problema de síntese-μ mista apresentado acima pode ser reformulado como um problema de síntese H_∞ de um controlador estruturado aumentado [1] cujos componentes sintonizável no presente caso são $K(j\omega)$, $W_r(j\omega)$ e $D_c(j\omega)$. O problema resultante de síntese H_∞ estruturada pode, por sua vez, ser resolvido eficientemente através de técnicas de otimização não-diferenciável [2,4], já existindo inclusive rotinas disponíveis, por exemplo, em MATLAB. Um grande atrativo da abordagem não-diferenciável é que ela permite a imposição de restrições de estrutura sobre o controlador.

O primeiro passo para se reformular o problema de síntese-μ mista como um problema de síntese H_∞ estruturada consiste na eliminação da inversa D_c^{-1} aparecendo em (9). Baseado em uma ideia introduzida por Apkarian [1], adota-se a reparametrização

$$D_c(j\omega) = \tilde{D}_c(j\omega) + I.$$

Nesse caso, a transferência $D_c^{-1}(j\omega)$ pode ser facilmente obtida como a transferência da entrada u para a saída y da interconexão

$$y = u - \tilde{D}_c(j\omega)y.$$

DOI: 10.5540/03.2016.004.01.0018

Considere, agora, o controlador aumentado definido como

$$C(s) \triangleq \mathrm{diag}(K(s), W_r(s), W_r(s), \tilde{D}_c(s), \tilde{D}_c(s)).$$

Note que $C(s)$ é estruturado mesmo que $K(s)$ originalmente não o seja. Sejam

$$N_1(s) \triangleq \mathcal{N}_s \star W_r(j\omega), \qquad (13)$$

$$N_2(s) \triangleq \mathcal{N}_s \star (\mathrm{diag}(W_r(s), D_c(s))(\mathcal{N}_s \star P(s) \star K(s))\mathrm{diag}(I, D_c^{-1}(s))). \qquad (14)$$

Finalmente, considere a planta de síntese aumentada $H(s)$ tal que

$$H(s) \star C(s) \triangleq \mathrm{diag}(N_1(s), N_2(s)). \qquad (15)$$

A planta $H(s)$ pode ser facilmente obtida numericamente via MATLAB, por exemplo.

Com as definições acima, traduz-se o problema de síntese-μ mista proposto como um problema de síntese H_∞ estruturada no qual o objetivo é encontrar o controlador aumentado $C(s)$ tal que $\|H(s) \star C(s)\|_\infty < 1$. Se for possível determinar tal $C(s)$, então o controlador $K(s)$ associado torna o sistema incerto da Figura 1.b robusto em estabilidade a toda incerteza em $\mathbf{B\Delta}$.

4 Exemplo numérico

Nesta seção, a eficiência da técnica proposta é corroborada pelo problema de projeto de um controlador que garanta desempenho robusto para um sistema massa-mola-amortecedor emprestado de Barros *et al.* [3].

A planta a ser controlada admite a seguinte representação em espaço de estado:

$$G_u = \left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & -k_1/m_1 & k_1/m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (k_1-k_2)/m1 & -(k_1-k_2)/m_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -b_1/m_1 & b_1/m_2 & 1/m_1 & 0 \\ 0 & 1 & b_1/m_1 & -(b_1+b_2)/m_2 & 0 & 1/m_2 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \qquad (16)$$

onde os valores nominais dos parâmetros são $\overline{m}_1 = 1$, $\overline{m}_2 = 2$, $\overline{k}_2 = 1$, $\overline{b}_1 = 0.05$, $\overline{b}_2 = 0.05$ e $\overline{k}_1 = 2$. O parâmetro k_1 é incerto, podendo variar entre 1.2 e 2.8. A incerteza em k_1 é representada por

$$k_1 = \overline{k}_1(1 + 0.8\delta_k), \quad \delta_k \in \mathbb{R}, \quad |\delta_k| \leq 1.$$

Como na Figura 1.a, a planta incerta (16) pode ser representada por $G_u = \delta_k \star G_0(s)$, onde o sistema nominal $G_0(s)$ pode ser facilmente obtido.

O primeiro sinal de entrada de G_u apresenta um retardo, que pode ser tratado como uma dinâmica negligenciada. Nessa abordagem, o erro introduzido por essa simplificação é limitado em magnitude pelo filtro $W_\tau = 2.6s/(s + 40)$. Surge, então, associada uma incerteza escalar complexa parametrizada por $\delta_\tau \in \mathbb{C}$, com $|\delta_\tau| \leq 1$.

DOI: 10.5540/03.2016.004.01.0018

A interconexão de síntese traduzindo o problema de desempenho robusto é representada na Figura 2. O sistema em malha fechada é colocado na forma padrão da Figura 1.b, considerando-se $w_\Delta = [w_\delta \quad d \quad n]'$ e $z_\Delta = [z_\delta \quad z_p \quad z_u]'$. O bloco de incertezas é dado por

$$\Delta = \mathrm{diag}(\delta_\tau, \delta_k, \Delta_p),$$

onde $\Delta_p(j\omega) \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ representa uma incerteza fictícia permitindo reformular o problema de desempenho robusto em um problema de estabilidade robusta [8]. Claramente, trata-se de um problema de síntese-μ mista, que não pode ser tratado pela técnica μ não-diferenciável.

As seguintes ponderações frequenciais são adotadas:

$$W_n = 0.001, \quad W_u = 10\frac{s+10}{s+1000} \quad W_d = \frac{0.25}{s+0.25}, \quad W_p = 80\frac{0.1}{s+0.1}. \tag{17}$$

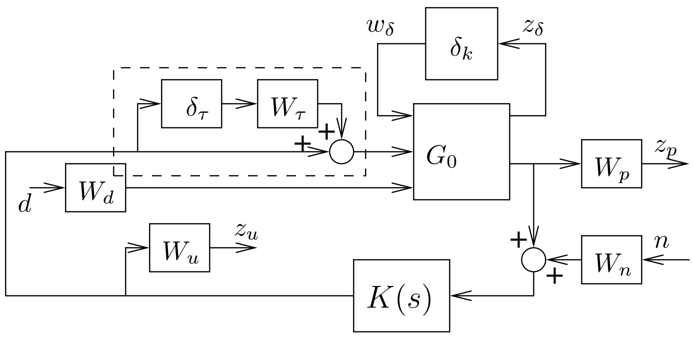

Figura 2: Interconexão de síntese

O problema é inicialmente solucionado via iteração D,G-K implementada na rotina *dksyn* disponível no MATLAB. Fixando-se a ordem dos multiplicadores em 3, o valor de pico encontrado para o limitante de μ denotado por $\nu \triangleq \max_\omega \mu(j\omega)$ é de 1,0719. Porém, conforme esperado o controlador encontrado apresenta ordem elevada de 30 estados.

Em seguida, o problema é solucionado via a nova síntese-μ mista proposta. A Tabela 1 mostra os valores encontrados para ν em função da ordem pré-selecionada para os multiplicadores (n_w) e para o controlador (n_k). Note que, com a nova técnica, é possível encontrar um controlador de ordem 6 que apresenta desempenho melhor que o controlador de ordem 30 obtido com a iteração $D, G-K$.

Adicionalmente, na última coluna da Tabela 1 estão relacionados os valores encontrados para ν caso fosse selecionado um controlador do tipo PID:

$$K(s) = K_p + \frac{Ki}{s} + \frac{K_d s}{1+T_f s}.$$

Deve-se destacar que a iteração $D, G-K$ torna-se simplesmente inoperante nesse caso.

5 Conclusões

Neste trabalho, foi apresentada uma nova ferramenta de projeto de controladores sujeitos a restrições estruturais e robustos contra incertezas mistas. A técnica baseia-se no

Tabela 1: Limitante superior para μ

$n_w \backslash n_k$	0	1	2	3	4	5	6	PID
0	74,41	27,54	12,06	4,956	2,466	2,106	2,045	15,14
1	70,31	27,34	6,079	4,321	1,887	1,271	1,223	11,09
2	70,12	26,86	5,884	4,053	1,799	1,184	1,086	9,562
3	69,92	26,56	5,127	3,906	1,179	1,168	1,055	9,469

valor singular estruturado e representa uma generalização para o caso de incertezas mistas da síntese-μ paramétrica estruturada introduzida em [1]. Diferentemente da iteração D, G-K, a nova ferramenta permite a imposição prévia de restrições estruturais sobre o controlador. No exemplo numérico apresentado, a técnica proposta permitiu o projeto de controlador robusto de menor complexidade do que aquele obtido pela iteração $D, G-K$.

Referências

[1] P. Apkarian. Nonsmooth μ synthesis. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 21(13):1493–1508, 2011.

[2] P. Apkarian and D. Noll. Nonsmooth H_∞ synthesis. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 51(1):71–86, 2006.

[3] D. Barros, S. Fekri, and M. Athans. Robust mixed-mu synthesis performance for mass-spring system with stiffness uncertainty. In *Intelligent Control, 2005. Proceedings of the 2005 IEEE International Symposium on, Mediterrean Conference on Control and Automation*, pages 743–748, June 2005.

[4] J. V. Burke, D. Henrion, A. S. Lewis, and M. L. Overton. HIFOO - A MATLAB package for fixed-order controller design and H_∞ optimization. In *5th IFAC Symposium on Robust Control Design*, 2006.

[5] Anders Helmersson. *Methods for Robust Gain Scheduling.* PhD thesis, Linköping University, SE-581 83 Linköping, Sweden, December 1995.

[6] J.H. Ly, M.G. Safonov, and F. Ahmad. Positive real parrott theorem with application to lmi controller synthesis. In *American Control Conference, 1994*, volume 1, pages 50–52 vol.1, 1994.

[7] Peter M. Young. Controller design with real parametric uncertainty. *International Journal of Control*, 65(3):469–509, 1996.

[8] Kemin Zhou, John C. Doyle, and Keith Glover. *Robust and Optimal Control.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1996.

DOI: 10.5540/03.2016.004.01.0018