

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

---

Considerações sobre a Condição Inicial na Construção do Diagrama de Bifurcação para o Mapa Logístico

Bruno de Paula Ossalin Paiva<sup>1</sup>

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, UFSJ, São João del-Rei, MG

Erivelton Geraldo Nepomuceno<sup>2</sup>

Departamento de Engenharia Elétrica, UFSJ, São João del-Rei, MG

Gleison Fransoares Vasconcelos Amaral<sup>3</sup>

Departamento de Engenharia Elétrica, UFSJ, São João del-Rei, MG

**Resumo.**

O Mapa Logístico é uma função recursiva que apresenta vários exemplos de dinâmica não linear. A análise deste mapa baseia-se no estudo da estabilidade dos seus pontos fixos, que podem ser estáveis ou instáveis. Uma das principais ferramentas utilizadas para o estudo do mapa logístico, e também dos demais, é o diagrama de bifurcação. Apesar de estudado exaustivamente, não se encontra na literatura um procedimento rigoroso para a construção deste mapa logístico, tanto no que se refere às restrições de condições iniciais quanto ao número de pontos que devem ser considerados como transitórios. Neste artigo, mostra-se a influência do cálculo computacional de funções recursivas e seu efeito na construção do diagrama logístico. Em particular, mostra-se que se pode obter um diagrama de bifurcação totalmente diferente daquele obtido tradicionalmente, quando se estabelece um padrão de condição inicial e os resultados numéricos são rigorosamente avaliados.

**Palavras-chave.** Mapa Logístico, Dinâmica Caótica, Pontos Fixos, Estabilidade.

---

<sup>1</sup>brunodepaula3p@yahoo.com.br

<sup>2</sup>nepomuceno@ufs.br

<sup>3</sup>amaral@ufs.br

## 1 Introdução

Funções recursivas, da forma  $x_{n+1} = f(x_n)$  possibilitam descrever uma grande variedade de problemas [1]. Por exemplo, existe um interesse considerável em encontrar circuitos que representem o comportamento das funções recursivas com potenciais aplicações em geração de números aleatórios, amostragem de frequência, variação e propagação de espectro em comunicações [8,2]. Como exemplo de funções recursivas importantes têm-se os mapas unidimensionais, em especial o mapa logístico, que exhibe vários fenômenos não lineares.

De acordo com [7], o mapa logístico é um dos exemplos mais abrangentes da matemática, pois o mesmo ilustra muitas noções fundamentais de dinâmica não linear: equilíbrio, periodicidade, caos, bifurcação e fractais. Na literatura é comum encontrar diversos trabalhos em que foram analisados os pontos fixos estáveis do mapa logístico de período 1 e múltiplos, contudo, pouca ou quase nenhuma atenção é dada aos pontos fixos instáveis. A análise deste mapa baseia-se no estudo da estabilidade dos seus pontos fixos, que podem ser estáveis ou instáveis. Uma das principais ferramentas utilizadas para o estudo do mapa logístico, e também de outros mapas, é o diagrama de bifurcação. Apesar de estudado exaustivamente, não se encontra na literatura um procedimento rigoroso para a construção deste mapa logístico, tanto no que se refere a restrições de condições iniciais quanto ao número de pontos que devem ser considerados como transitórios. Neste artigo, mostra-se a influência do cálculo computacional de funções recursivas e seu efeito na construção do diagrama logístico.

## 2 Conceitos Preliminares

Dado o mapa logístico proposto por [3]

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n) \tag{1}$$

em que  $n \in \mathbb{N}$  e  $r \in \mathbb{R}$

De acordo com [4] quando adota-se  $x_0 \in [0,1]$ , tem-se que para  $0 \leq r \leq 4$   $x_n$  pertence ao intervalo  $[0,1]$  e para  $r > 4$  é obtido, em alguma das interações um valor negativo, o que indica que  $x_n \rightarrow -\infty$ .

### 2.1 Análise do Mapa Logístico

Quando analisa-se o mapa logístico considerando que o parâmetro de controle pertence ao intervalo  $0 \leq r \leq 4$ , calcula-se os pontos fixos em função de  $r$  fazendo  $f(x^*) = x^*$ . Assim, são obtidos os pontos fixos  $x_1^* = 0$  e  $x_2^* = 1 - (1/r)$  e os autovalores associados a  $x_1^*$  e  $x_2^*$  valem, respectivamente,  $\lambda_1 = r$  e  $\lambda_2 = 2 - r$

Em [4] é dito que  $x_1^* = 0$  será assintoticamente estável para  $0 \leq r < 1$  e instável para  $r \geq 1$ . Agora em  $r = 1$  os pontos fixos trocam de estabilidade. Logo, em  $(x^*, r) = (0,1)$  ocorre uma bifurcação transcítica supercrítica. Logo  $x_2^* = 1 - (1/r)$  é assintoticamente estável para  $1 < r < 3$ .

Dando continuidade à análise tem-se que caso  $r = 3$ , o autovalor associado ao ponto fixo  $x_2^*$  será  $\lambda_2 = -1$ . Segundo [4]  $x_2^*$  sofre uma bifurcação de duplicação de período, portanto, para  $r > 3$  surge uma órbita de período-2 formada pelos pontos  $x_3^*$  e  $x_4^*$  que são definidos da seguinte maneira.

$$\begin{aligned} x_3^* &= f(x_4^*) = f(f(x_3^*)) = f^{(2)}(x_3^*) \\ x_4^* &= f(x_3^*) = f(f(x_4^*)) = f^{(2)}(x_4^*) \end{aligned} \tag{2}$$

Para se obter a estabilidade da órbita de período-2, segundo [4] é necessário avaliar a estabilidade dos pontos fixos  $x_3^*$  e  $x_4^*$ . É sabido que a órbita é assintoticamente estável se  $x_3^*$  e  $x_4^*$  são pontos fixos assintoticamente estáveis de  $f^{(2)}$ . Logo calcula-se os autovalores associados aos pontos fixos fazendo:

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= \left. \frac{df^{(2)}(x)}{dx} \right|_{x=x_3^*} \\ \lambda_4 &= \left. \frac{df^{(2)}(x)}{dx} \right|_{x=x_4^*} \end{aligned} \tag{3}$$

obtém-se que:

$$\lambda_3 = \lambda_4 = -r^2 + 2r + 4 \tag{4}$$

Para que a órbita de período-2 seja assintoticamente estável é necessário a definição:

$$-1 < -r^2 + 2r + 4 < +1 \tag{5}$$

portanto,

$$3 < r < 1 + \sqrt{6} \approx 3,449490 \tag{6}$$

Para  $r = 1 + \sqrt{6}$ , tem-se que  $\lambda_3 = \lambda_4 = -1$  e a órbita de período-2 sofre uma bifurcação de duplicação de período. Portanto para  $r = 1 + \sqrt{6}$ , segundo [4], os pontos fixos de  $f^{(2)}$  perdem sua estabilidade e se bifurcam, gerando uma órbita de período-4 assintoticamente estável, cujos pontos são obtidos a partir de  $x^* = f^{(4)}(x^*)$ .

Conforme se aumenta o valor do parâmetro de controle  $r$ , ocorrem sucessivas bifurcações *flip*, gerando órbitas de períodos 8, 16, 32, 64 ...

### 3 Metodologia

Em concordância com [4], é sabido que os vários comportamentos não-lineares do mapa logístico ocorrem à medida que se varia o parâmetro  $r$ . Entretanto, surge uma dúvida a respeito do que poderia acontecer, caso a condição inicial também depende-se do parâmetro de controle, pois, na literatura não existe até então, nenhuma restrição para a condição inicial, quando a mesma está dentro do intervalo  $[0,1]$ .

Para iniciar a busca por uma resposta foi definido primeiro o domínio:

$$I = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\} \tag{7}$$

da equação logística e o conjunto das condições iniciais dependentes do parâmetro de controle,  $A \subset I$ , com:

$$A = \{a \in I \mid a = 1/r\}. \tag{8}$$

em que  $r > 1$

Aplicando então  $x_0 = a$  na Eq. 1, obtém-se que:

$$x_1 = f(a) = r \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{r}\right) = \frac{r-1}{r} \tag{9}$$

e  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ , então  $d(f^p(a), x^*) \rightarrow 0$  quando  $p \rightarrow \infty$ . Logo

$$x = \frac{r-1}{r} \tag{10}$$

é um ponto fixo da Eq. 1, que pode ser estável ou instável.

Levando em consideração o que foi obtido na Eq. 10, um fato curioso surge, quando o ponto fixo é dito ser instável, pois um ponto fixo estável possui uma órbita que converge para o mesmo, ou de uma forma mais simples, um conjunto de pontos que, quando alcançados levam ao ponto fixo. Enquanto o ponto fixo instável não, pois de acordo com [8] um ponto fixo instável é aquele que não é estável.

Todavia, em consonância, com o que foi definido tem-se que um ponto fixo qualquer, pode ser alcançado quando  $x_0 = 1/r$ , portanto, mesmo um ponto fixo instável possui um ponto que converge para ele além dele próprio. O seguinte procedimento é capaz de gerar esses pontos:

1. Obtém-se o ponto fixo  $x^*$  quando  $x_0 = a$ ;
2. Faz-se a função inversa  $f^{-1}(x)$  para  $x = x^*$  e obtém-se duas soluções que são  $y_1 = [1/r, 1 - 1/r]$ ;
3. Dentre as duas raízes escolhe-se  $y_{1,1} = 1/r$  e aplica-se a função inversa para  $x = y_{1,1}$ ;
4. A partir da segunda aplicação da função inversa surgem duas novas raízes. Para escolher qual solução será aplicada à função inversa nesta iteração e nas demais será adotado que  $y_n = \max[s_{n,1}, s_{n,2}]$ .

Por meio da aplicação do procedimento definido espera-se que sejam encontrados pontos que levem ou não ao ponto fixo instável.

## 4 Resultados

Como se deseja analisar um ponto fixo instável, deve-se então escolher um valor de  $r$  para o qual seja obtido o ponto desejado.

Analisando diagramas de bifurcação, como os propostos por [4,6], pode-se afirmar que quando  $r = 4$  o sistema possui diversos pontos fixos instáveis associados às condições iniciais possíveis.

Contudo, para uma condição inicial  $x_0 = 1/4$  pertencente ao conjunto  $A$  encontra-se um ponto fixo  $x^* = 3/4$ , que é dito instável quando se analisa o autovalor associado, que para este ponto fixo:

$$\lambda = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=3/4} = -2 \tag{11}$$

Logo, para verificar se o ponto fixo instável obtido não possui um conjunto de pontos que levam a ele, é aplicado o procedimento definido na metodologia. Alguns dos cálculos feitos são apresentados abaixo (Eq. 12)

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{4} \\ y_2 &= \frac{\sqrt{3} + 2}{4} \\ y_3 &= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}} + 2}{4} \\ y_4 &= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{3}}} + 2}{4} \\ &\vdots \\ y_n &= \frac{\sqrt{\dots \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{3}}} + 2}}{4} \end{aligned} \tag{12}$$

Na Fig. 1 é apresentada a sequência  $\{y_n\}$  para os primeiros 20 valores. Nela é possível constatar que a sequência de pontos obtida pela aplicação da metodologia leva para o ponto fixo que até então é dito instável.

Na literatura, não é apresentada nenhuma restrição quanto à condição inicial, desde que o valor esteja no intervalo  $[0,1]$ , logo, é pertinente plotar o diagrama de bifurcação para  $x_0 = 1/r$  e  $1 \leq r \leq 4$  (veja Fig. 2).

Contudo, a simulação apresenta um resultado errado, pois segundo a metodologia proposta, para uma condição inicial  $x_0 = 1/r$  o valor de  $x_n$  é igual ao ponto fixo  $1 - 1/r$ . Logo, algo de errado ocorreu no processo numérico de obtenção da resposta, pois o resultado correto deveria ser o apresentado na Fig. 3. Neste caso, o erro ocorre devido à imprecisão numérica. Nepomuceno (2014) [5], apresentou uma metodologia, para evitar esse tipo de situação de um modo geral. Observe, que isso pode ocorrer para infinitos pontos, uma vez que, os pontos fixos instáveis possuem infinitas condições iniciais que permitem que sejam levados a eles.

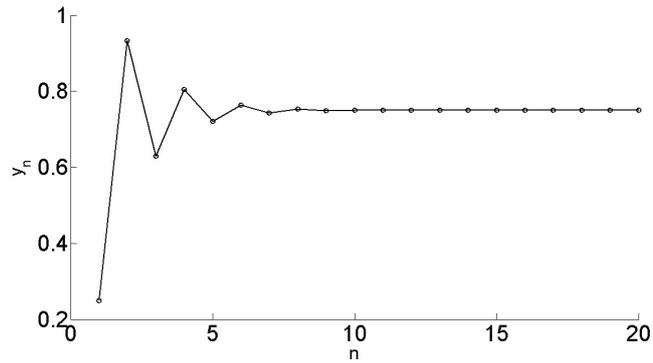


Figura 1: Sequência  $y_n$  para os 20 primeiros valores.  $y_n \rightarrow 3/4$  e  $n \rightarrow \infty$ . Um exemplo, que este cálculo mostra convergência é  $y_{50} = 0,7500000000000001$ .

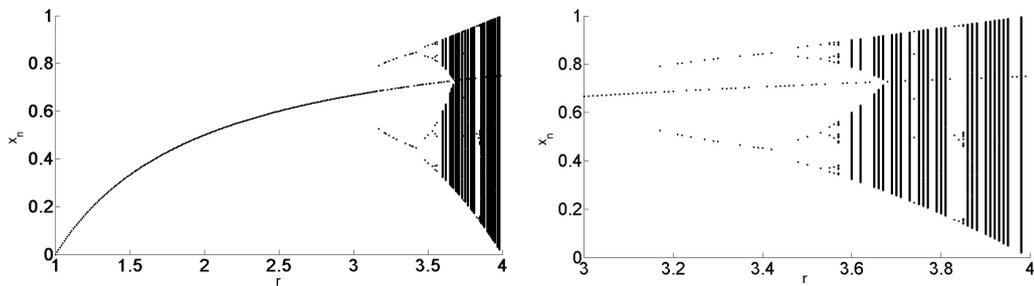


Figura 2: Diagrama de Bifurcação do Mapa Logístico quando à condição inicial é  $x_0 = 1/r$ , para  $1 \leq r \leq 4$  (à esquerda) e  $3 \leq r \leq 4$  (à direita).

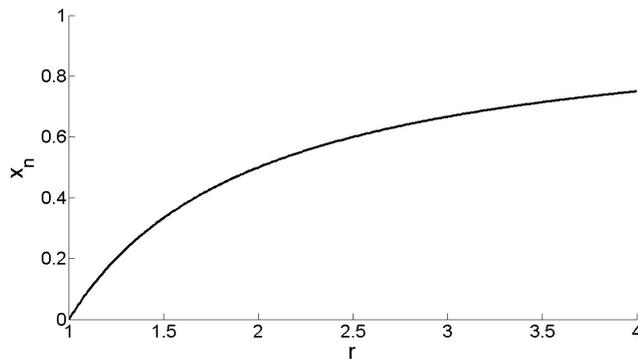


Figura 3: Diagrama de  $x_n$  em função de  $r$ .

## 5 Conclusão

Como pode ser visto, a condição inicial influencia na construção do diagrama de bifurcação do Mapa Logístico. O diagrama de bifurcação da Fig. 2 difere do diagrama da Fig. 3, pois pelo que foi definido na metodologia o diagrama da Fig. 3 não está coerente

com os resultados esperados. Logo, é pertinente dizer que, existe um erro na simulação, conforme mostrado em [5].

Portanto, uma hipótese pode ser levantada, quando se leva em consideração os resultados apresentados por [5] sobre funções recursivas. Qual seria então o motivo da existência destes dois diagramas (o encontrado na literatura para  $x_0 = 1/r$  e o apresentado aqui para  $x_0 = 1/r$  visto como correto)? Seria então o problema devido à incapacidade do computador em representar o conjunto dos números reais? Fica evidente, ao menos, que é necessário estabelecer um procedimento mais rigoroso para a construção de diagramas de bifurcação. Acredita-se que este tipo de situação possa ocorrer também em outros mapas. Em futuras pesquisas, pretende-se avançar nesta temática.

## Agradecimentos

Agradeço a CAPES, CNPq, e Fapemig pelo suporte financeiro. Ao PPGEL-UFSJ pela oportunidade.

## Referências

- [1] M. J. Feigenbaum, Quantitative Universality for a Class of Non-linear Transformations, *The Journal of Statistical Physics*, 19:25-52, (1978), DOI: 10.1007/BF01020332.
- [2] M. Garcia-Martinez, M. Campos-Canton, E. Campos-Canton and S. Celikovsky, Difference map and its electronic circuit realization, *The Journal of Nonlinear Dynamics and Chaos in Engineering Systems*, 74:819-830, (2013), DOI: 10.1007/s11071-013-1007-4.
- [3] R. M. May, Simple mathematical models with very complicated dynamics, *The Journal Nature*, 261:459-467, (1976), DOI: 10.1038/261459a0.
- [4] L. H. A. Monteiro, *Sistemas Dinâmicos*, São Paulo, Livraria da Física, (2006).
- [5] E. G. Nepomuceno, Convergence of recursive functions on computers, *The Journal of Engineering*, 1-3, (2014), DOI: 10.1049/joe.2014.0228.
- [6] E. Ott, *Chaos in dynamical systems*, New York, Cambridge University Press, (2002).
- [7] P. Saha and S. H. Strogatz, The Birth of Period Three, *Mathematics Magazine*, vol. 68,42-47, (1995), DOI: 10.2307/2691376.
- [8] M. Suneel, Electronic circuit realization of the logistic map, *The Journal Sadhana: Academy Proceedings In Engineering Sciences*, 31:69-78, (2006), DOI: 10.1007/BF02703801.
- [9] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, New York, Springer-Verlag, (2003).