Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 4, N. 1, 2016.
Trabalho apresentado no DINCON, Natal - RN, 2015.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Análise Dinâmica de uma Viga de Euler-Bernoulli Submetida a Impacto no Centro após Queda Livre Através do Método de Diferenças Finitas

Bruno Conti Franco[1]

Grupo de Mecânica Aplicada, Programa de Pós Graduação em Engenharia,

Universidade Federal do Pampa - UNIPAMPA, Alegrete, RS.

Wang Chong[2]

Grupo de Mecânica Aplicada, Programa de Pós Graduação em Engenharia,

Universidade Federal do Pampa - UNIPAMPA, Alegrete, RS.

Resumo. O presente trabalho apresenta análise dinâmica do movimento transversal de uma barra, submetida a impacto provocado por queda livre, pelo método de diferenças finitas (MDF). Os resultados do algoritmo desenvolvido são comparados aos do método de elementos finitos, confirmando que é correto e confiável.

Palavras-chave. Análise dinâmica, Viga de Euler-Bernoulli, Método de Diferenças Finitas, ANSYS – LS, Elementos Finitos.

1 Introdução

O Brasil é hoje um dos maiores produtores de minério de ferro do mundo. A extração é realizada em diversas etapas, as principais são a lavra, a britagem e a moagem. A moagem é a operação de fragmentação fina, após essa etapa o minério está pronto para ser utilizado em outros processos industriais. O equipamento mais comum nesse processo é o moinho de Barras, nele a moagem ocorre pelo impacto entre as barras de aço (Figura 1) e as pedras de minério. Essas máquinas apresentam elevado custo de manutenção devido a constante quebra das barras internas devido aos esforços causados pelo choque com as pedras de minério.

Para reduzir o custo de manutenção do equipamento é necessário análise matemática de mecânica da fratura na barra. O impacto entre as pedras e as barras dificulta a modelagem matemática, por que a propagação de trinca induzida por impacto é complexa e difícil de ser modelada matematicamente.

[1] bruno.franco@ibiruba.ifrs.edu.br
[2] wangchong@unipampa.edu.br

 © 2016 SBMAC

Figura 1: Unidade de processamento de um moinho de Barras

O movimento transversal de vigas tem sido amplamente estudado com vários trabalhos publicados sobre esse assunto. Em estudo apresentado em [1] sobre o efeito de uma trinca na estabilidade dinâmica de uma viga de Timoshenko com extremidades livre submetida a uma força constante ou intermitente, as frequências naturais e os módulos de vibração transversal foram obtidos pelos métodos de elementos finitos e das escalas múltiplas. Na mesma linha, em [2] foi desenvolvida uma técnica numérica para análise de vibrações de vigas de seção transversal circular contendo trincas, porém também é utilizado o método de elementos finitos.

O método numérico mais usado para o estudo da propagação dinâmica de trinca é o Método de Elementos Finitos (MEF). Atualmente os principais softwares comerciais como ANSYS e ABAQUES apresentam custo elevado e exigem alto nível de treinamento para os usuários, e ainda não são capazes de analisar propagação dinâmica de trinca causada por impacto. Por outro lado o MDF é um método numérico simples de fácil aplicação e muito utilizado em pesquisas científicas.

O objetivo deste trabalho é desenvolver um algoritmo de diferenças finitas para modelar a vibração de uma barra do moinho de barras submetida a impacto. Esse algoritmo deve ser aplicado para análise da propagação dinâmica de trinca em trabalhos futuros.

2 Fundamentação matemática

2.1 Equação governante

Considera-se uma viga uniforme que choca ao centro dela com um suporte rígido após queda livre. A teoria clássica de Euler-Bernoulli ou da flexão pura considera vigas prismáticas uniformes (de seção transversal constante) com comprimento longitudinal como dimensão predominante. Nesse modelo não é considerado a deformação de cisalhamento presente nas seções transversais. Para essas vigas o interesse de estudo são as ações de movimento chamadas de ações de flexão, conforme mostra Figura 2. A equação geral para a vibração lateral forçada de uma viga uniforme [3], é dada por:

$$\frac{\partial^2 M(\varsigma,t)}{L^2 \partial \varsigma^2} + \rho A \frac{\partial^2 w(\varsigma,t)}{\partial t^2} = f(\varsigma,t) \qquad \text{com} \qquad \varsigma = \frac{x}{L},\ 0 \le \zeta \le 1 \tag{1}$$

onde M é o momento fletor, L é a metade do comprimento total da barra (devido a simetria), t é o tempo, ρ é a densidade do material, A é a área da seção transversal, w é o deslocamento transversal, $f(\varsigma,t)$ é a força corporal externa [N/m] e x é a posição no eixo longitudinal adimensionalizado por ς .

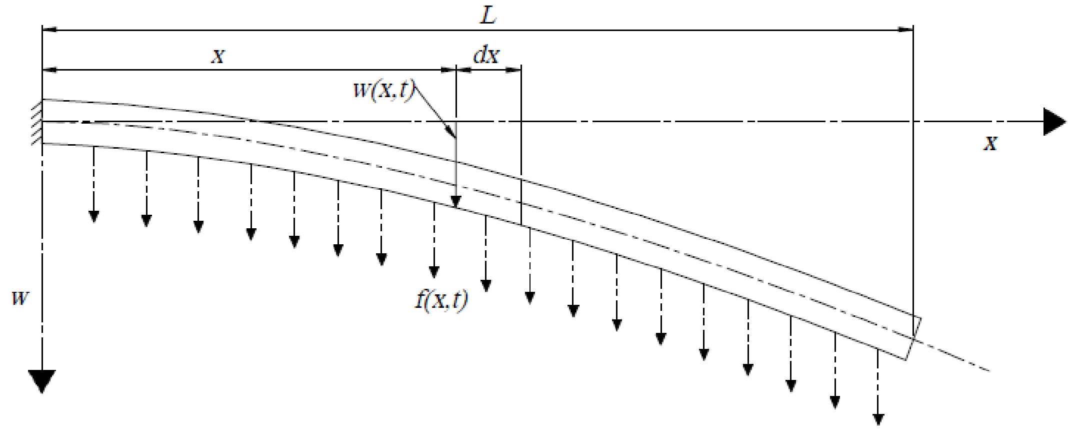

Figura 2: Flexão transversal

A viga é discretizada uniformemente em n+1 pontos, a distância entre cada ponto é chamado de passo h=1/n, um valor adimensional, representado na Figura 3.

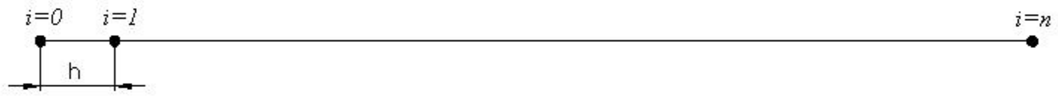

Figura 3: Malha

A expressão $\partial^2 M / L^2 \partial\varsigma^2$ na Equação (1), corresponde à segunda derivada de *M* sobre *x*, pode ser representada pela fórmula de diferenças finitas centrada:

$$\frac{\partial^2 M_i^j}{L^2\partial\varsigma^2} = EI\frac{\partial^4 w_i^j}{L^4\partial\varsigma^4} = \frac{E}{L^4h^4}\Big(I_{i+1}^j\left[w_{i+2}^j - 2w_{i+1}^j + w_i^j\right] - 2I_i^j\left[w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j\right] + I_{i-1}^j\left[w_i^j - 2w_{i-1}^j + w_{i-2}^j\right]\Big) \quad \text{com } 1 \le i \le n \text{ e } 1 \le j \le m \tag{1}$$

Onde *I* é o momento de inércia, *m* o número de incrementos temporal e utilizando-se da seguinte relação:

$$M(x,t) = EI\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \tag{3}$$

Ou seja

$$M_i^j = M(\varsigma_i, t^j) = EI \frac{\partial^2 w(\varsigma_i, t^j)}{L^2 \partial \varsigma^2} = \frac{EI}{L^2 h^2}(w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j) \tag{4}$$

A expressão $\partial^2 w(\varsigma L, t) / \partial t^2$ corresponde à aceleração. Para calculá-la utilizamos a formula de movimento linear de um ponto material considerando aceleração como constante com incremento temporal muito curto: $\Delta t = t^j - t^{j-1}, j = 1, 2, \dots, m$. Assim, pela relação

$$\Delta s = v\Delta t + \frac{1}{2} a \Delta t^2 \tag{5}$$

Obtêm-se:

$$a = \frac{2(\Delta s - v\Delta t)}{\Delta t^2} \tag{6}$$

Na forma dicretizada:

$$a_i^{j-1} = \frac{2(\Delta s_i - v_i^{j-1} \Delta t)}{\Delta t^2} \tag{7}$$

Substituindo $\Delta s_i = w_i^j - w_i^{j-1}$, então, temos:

$$\rho A \frac{\partial^2 w(\varsigma_i, t^j)}{\partial t^2} = \frac{2\rho A}{\Delta t^2}\left(w_i^j - w_i^{j-1} - v_i^{j-1} \Delta t\right) \tag{8}$$

Substituindo as Equações (1) e (8) na Equação (1) e $f(\varsigma, t) = \rho \mathrm{Ag}$, temos:

$$\begin{gathered} \frac{E}{L^4 h^4}\left(I_{i+1}^j \left[w_{i+2}^j - 2w_{i+1}^j + w_i^j\right] - 2I_i^j \left[w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j\right] + I_{i-1}^j \left[w_i^j - 2w_{i-1}^j + w_{i-2}^j\right]\right) + \\ + \frac{2\rho A}{\Delta t^2}\left(w_i^j - w_i^{j-1} - v_i^{j-1} \Delta t\right) = \rho A g \end{gathered} \tag{9}$$

Após obter w_i^j, pode-se calcular a_i^{j-1} pela Equação (7) e em seguida:

$$v_i^j = v_i^{j-1} + a_i^{j-1} \Delta t \tag{10}$$

2.2 Condições Iniciais

A primeira condição inicial é dada por $w(x,0) = w(\varsigma,0) = 0$, assim temos $w_i^0 = 0$. A outra condição inicial é a velocidade inicial da barra no momento em que toca o minério de ferro, dada por quada livre de altura H:

$$v_i^0 = \sqrt{2gH} \tag{11}$$

2.3 Condições de contorno

Conforme a Figura 2, a barra encontra-se com uma extremidade engastada e a outra livre assim tem duas condições de contorno em cada extremidade.

Na extremidade engastada ($x = \varsigma L = 0$ ou $i = 0$), a deflexão é $w(0, t^j) = 0$ e a inclinação é dada por $\partial w(0,t^j)/\partial x = (w_1^j - w_{-1}^j)/2h = 0$, então, as condições de contorno para deflexão e inclinação são respectivamente:

$$w_0^j = 0 \tag{12}$$

e

$$w_{-1}^j = w_1^j \tag{13}$$

Na extremidade livre ($\varsigma = 1$ ou $i = n$), temos o momento: $EI(1)\dfrac{\partial^2 w(1,t^j)}{L^2 \partial \varsigma^2} = 0$. Isto é pela Equação (4):

$$w_{n+1}^j = -w_{n-1}^j + 2w_n^j \tag{14}$$

Pela força cortante: $\dfrac{\partial}{L\partial\varsigma}\left(EI(1)\dfrac{\partial^2 w(1,t^j)}{L^2\partial\varsigma^2}\right) = 0$, temos:

$$w_{n+2}^j = w_{n-2}^j - 4w_{n-1}^j + 4w_n^j \tag{15}$$

2.4 Matriz dos coeficientes de deslocamento

A resolução das equações do sistema linear para o cálculo dos coeficientes de deslocamentos é realizada através das matrizes:

$$\begin{pmatrix}
(7\alpha+\beta) & -4\alpha & \alpha & & & & & & & & & & \\
-4\alpha & (6\alpha+\beta) & -4\alpha & \alpha & & & & & & & & & \\
+\alpha & -4\alpha & (6\alpha+\beta) & -4\alpha & \alpha & & & & & & & & \\
0 & \alpha & -4\alpha & (6\alpha+\beta) & -4\alpha & \alpha & & & & & & & \\
0 & 0 & \alpha & -4\alpha & (6\alpha+\beta) & -4\alpha & \alpha & & & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & \\
 & & & & & & & \cdots & \alpha & -4\alpha & (6\alpha+\beta) & -4\alpha & \alpha \\
 & & & & & & & \cdots & 0 & \alpha & -4\alpha & (5\alpha+\beta) & -2\alpha \\
 & & & & & & & \cdots & 0 & 0 & 2\alpha & -4\alpha & (2\alpha+\beta)
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} w_1^j \\ w_2^j \\ w_3^j \\ w_4^j \\ w_5^j \\ \vdots \\ w_{n-2}^j \\ w_{n-1}^j \\ w_n^j \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} \gamma_1^j \\ \gamma_2^j \\ \gamma_3^j \\ \gamma_4^j \\ \gamma_5^j \\ \vdots \\ \gamma_{n-2}^j \\ \gamma_{n-1}^j \\ \gamma_n^j \end{pmatrix} \tag{16}$$

onde $\alpha = \dfrac{EI}{L^4 h^4}$, $\beta = \dfrac{2\rho A}{\Delta t^2}$ e $\gamma_i^j = \rho A\left(g + \dfrac{2v_i^{j-1}}{\Delta t}\right)$.

 © 2016 SBMAC

3 Resultados e discussões

Os dados de entrada estão listados na Tabela 1.

Tabela 1 – Dados de entrada para as simulações

Parâmetro	Valor
Módulo de Elasticidade (E)	180 GPa
Raio (R)	0.0508 m
Comprimento da metade da barra (L)	2.21 m
Densidade (ρ)	7850 Kg/m³
Altura da queda (H)	6.096 m
Intervalo de tempo (Δt)	1 μs
Número de discretização (n)	221

A simulação foi realizada pelo Matlab. Para comparação, usou-se o software ANSYS Mechanical APDL 12.0.1, no módulo LS-DYNA. O elemento selecionado foi o BEAM161, configurado para seção transversal circular.

A figura 4 mostra a comparação dos resultados do deslocamento transversal do último nó da barra, i = n. Os resultados obtidos pelo MDF e pelo ANSYS são quase idênticos. Isso confirma que o algoritmo desenvolvido é confiável.

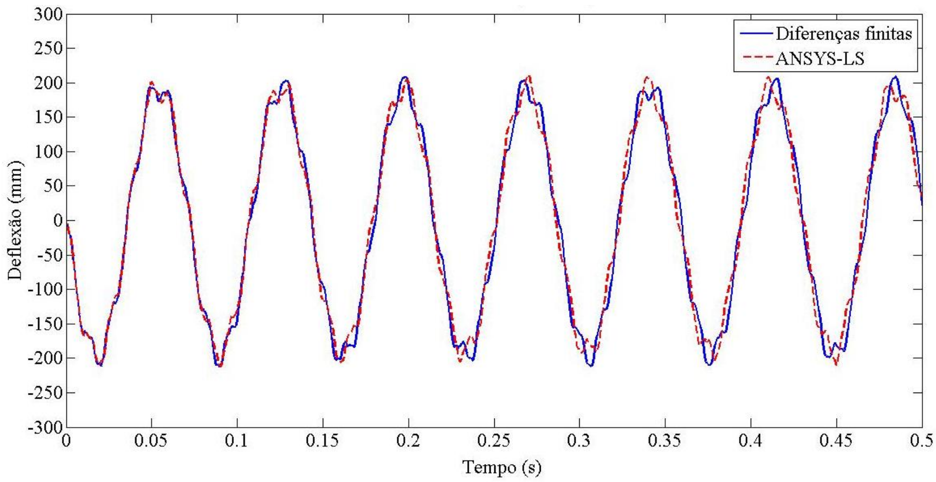

Figura 4 – Deslocamento no último nó da barra i = n, tempo de 0 a 0.5 s.

A Figura 5 apresenta o momento fletor máximo na barra e o ponto em que ele ocorre. O pico entre 1700 e 1800 μs pode ser interpretado que existem dois locais (a 8% e a 50% do comprimento) na viga onde os momentos fletores são quase idênticos e máximos no instante 1707 μs, ou seja, as tensões máximas poderão ocorrer nestes dois lugares no mesmo instante de tempo. Isto implica que a barra poderá ser quebrada nestes lugares.

DOI: 10.5540/03.2016.004.01.0034 © 2016 SBMAC

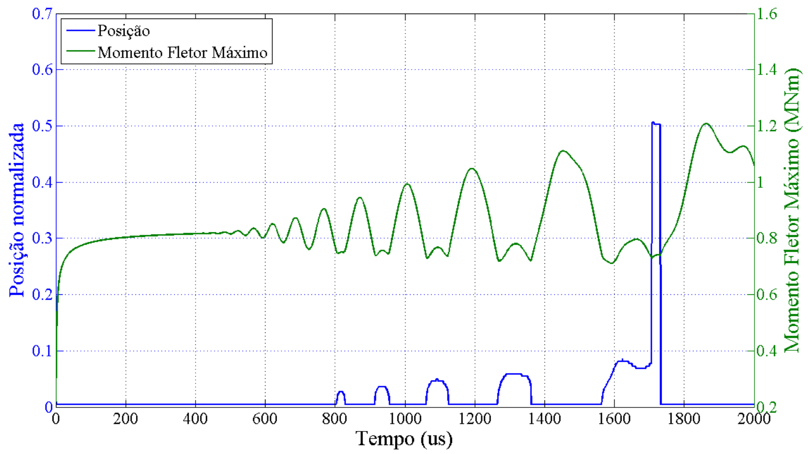

Figura 5 – Posição de Momento Máximo vs Tempo.

4 Conclusão

A análise dinâmica do efeito de choque numa estrutura em geral é complexa. O desenvolvimento do programa baseado no MEF para esse fim requer alto nível de conhecimento em MEF. O uso de software comercial pode custar caro além de requer intenso treinamento. O algoritmo desenvolvido baseado no MDF para análise da viga de Euler-Bernoulli é eficiente e confiável, mas relativamente simples em relação ao MEF. Pelo programa desenvolvido, pode-se obter os perfis de deslocamento, velocidade e aceleração da viga em qualquer instante e em qualquer ponto da viga. Analisando os resultados obtidos, é possível perceber mais de um local na viga onde poderá ocorrer mesma tensão máxima no mesmo instante de tempo. Isso revela que a barra pode ser quebrada em pedaços. O algoritmo desenvolvido poderá ser utilizado em trabalhos futuros para análise de propagação de trinca provocado por choque.

Referências

[1] K. H. Kim and J. H. Kim, Effect of a crack on the dynamic stability of a free-free beam subjected to a follower force, Journal of Sound and Vibration, vol 1, 119-135, (2000).

[2] M. Kisa and M. A. Gurel, Free vibration analysis of uniform and stepped cracked beams with circular cross sections, International Journal of Engineering Science, vol 1, 364-380, (2007).

[3] S. S. RAO, Mechanical Vibrations, Pearson Prentice Hall, vol. 5, (2011).

 © 2016 SBMAC