Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 4, N. 1, 2016.
Trabalho apresentado no DINCON, Natal - RN, 2015.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Estabilidade e Estabilização de Sistemas Lineares via Programação Semidefinida

Valeska Martins de Souza[1]
Departamento de Matemática, UFMA, São Luís, MA
Waldelene Maria Moura Gomes[2]
Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, UFMA, São Luís, MA
Angel Fernando Torrico Cáceres[3]
Departamento de Engenharia de Eletricidade, UFMA, São Luís, MA

Resumo. Este trabalho propõe a criação e implementação de pacotes de algoritmos computacionais, escritos em linguagem R, que resolvem problemas de Programação Semidefinida com aplicações na análise de estabilidade e estabilização de sistemas lineares no tempo contínuo, descritas como problemas LMIs (do inglês *Linear Matrix Inequalities*). A eficiência da metodologia apresentada é ilustrada através de exemplos numéricos.

Palavras-chave. Programação Semidefinida. LMIs. Linguagem R. Estabilidade. Estabilização

1 Introdução

Um problema de Programação Semidefinida (PSD) é um problema de otimização convexa que consiste em minimizar uma função linear sob o cone das matrizes semidefinidas positivas.

A programação semidefinida é uma extensão da programação linear em que as variáveis vetoriais são substituídas por matrizes e as restrições relativas a cada vetor não negativo são substituídas por matrizes semidefinidas positivas. Essa generalização engloba várias propriedades importantes da programação linear como, por exemplo, convexidade do conjunto factível e uma rica teoria de dualidade.

Alguns problemas importantes da teoria de controle como, por exemplo, filtragem, controle ótimo e controle robusto, podem ser reformulados como problemas de PSD que podem ser resolvidos por métodos de pontos interiores de forma rápida e eficiente [2, 3].

Neste trabalho é proposto a criação e implementação de pacotes de algoritmos computacionais, escritos em linguagem R, para resolver problemas de PSD.

[1]valeska.martins@ufma.br
[2]waldelene@yahoo.com.br
[3]ftorrico@dee.ufma.br

DOI: 10.5540/03.2016.004.01.0035

R é uma linguagem de programação aberta, gratuita e de alto nível. Além disso, é também um ambiente de modelagem e visualização de dados extremamente versátil e confiável, podendo ser instalado e executado em qualquer sistema operacional como, por exemplo, Unix, Linux, Windows e Macintosh OS X.

A linguagem R foi desenvolvida essencialmente para estatística computacional. No entanto, atualmente é utilizada por profissionais das mais diversas áreas do conhecimento.

A principal vantagem no uso da linguagem R está no fato de ser uma linguagem computacional livre e de domínio público que permite o compartilhamento de pacotes implementados por um grande número de desenvolvedores no mundo inteiro [7].

2 Propósito

Tradicionalmente, a maioria dos algoritmos para resolver problemas de PSD usam métodos de pontos interiores e são resolvidos utilizando-se os pacotes LMI Control Toolbox, o YALMIP e o SeDuMi do MATLAB.

O objetivo principal do artigo é a criação e implementação de pacotes de algoritmos computacionais, escritos em linguagem R, que resolvem problemas de estabilidade e estabilização de sistemas lineares no tempo contínuo. Para resolver computacionalmente tais problemas é utilizado o método projetivo de Nemirovski e Gahinet [6].

A motivação para utilizar a linguagem R, é principalmente a escassez, e até mesmo uma provável inexistência de trabalhos disponíveis na literatura que resolvam problemas de PSD com aplicações na teoria de controle.

3 Métodos

Um problema de PSD consiste em minimizar uma função linear sujeita à uma restrição LMI, na forma

$$\begin{array}{rl} \min & c^T x \\ s.a & F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i F_i \prec 0, \end{array} \tag{1}$$

em que $c \in \mathbb{R}^m$ e as matrizes $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad i = 0, 1, \cdots, m$ são conhecidas.

Considere um sistema linear invariante no tempo contínuo, descrito por

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \tag{2}$$

em que $x \in \mathbb{R}^m$ representa o vetor de estados e $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é a matriz dinâmica.

O sistema (2) é assintoticamente estável se todos os autovalores da matriz A têm parte real negativa.

Teorema 3.1. *O sistema (2) é estável se e somente se, existir uma matriz $P = P^T \succ 0$ que satisfaz à seguinte LMI*

$$A^T P + PA \prec 0. \tag{3}$$

Demonstração. Ver [2]. □

DOI: 10.5540/03.2016.004.01.0035

Considere agora uma coleção finita de sistemas lineares contínuos descritos por

$$\dot{x}(t) = A_i x(t), \quad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{4}$$

em que $x \in \mathbb{R}^m$ e $A_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

Teorema 3.2. *A coleção de sistemas (4) é simultaneamente estável, se existir uma única matriz $P = P^T \succ 0$ que satisfaz às seguintes LMIs*

$$A_i^T P + P A_i \prec 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{5}$$

Demonstração. Ver [2]. □

Neste artigo, o método projetivo é utilizado na resolução do seguinte problema de PSD

$$\begin{array}{ll} \min & trace(P) \\ s.a & P = P^T \succ 0 \\ & A_i^T P + P A_i + Q \prec 0, \ i = 1, \cdots, n. \end{array} \tag{6}$$

Considere um sistema linear contínuo descrito por $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, em que $x \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de estados, $u \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de controle, $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é a matriz dinâmica e $B \in \mathbb{R}^{m \times p}$ é a matriz de entrada de controle.

O problema de estabilização consiste em determinar uma lei de controle $u(t) = Kx(t)$ que estabilize assintoticamente o sistema em malha fechada

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t). \tag{7}$$

Teorema 3.3. *O sistema (7) é estabilizável se e somente se, existem matrizes $P = P^T \succ 0, W = W^T \succ 0$ e $Z \in \mathbb{R}^{p \times m}$ que satisfazem à seguinte LMI*

$$AW + WA^T + BZ + Z^T B^T \prec 0. \tag{8}$$

Além disso, o ganho do controlador do sistema é dado por $K = ZW^{-1}$ e $P = W^{-1}$.

Demonstração. Ver [5]. □

Considere agora uma coleção finita de sistemas lineares descrita por $\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i x(t), \quad i = 1, 2, \cdots, n$, em que $x \in \mathbb{R}^m, u \in \mathbb{R}^p, A_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $B_i \in \mathbb{R}^{m \times p}$.

O problema de estabilização simultânea consiste em determinar uma única lei de controle $u(t) = Kx(t)$ que garante a estabilização de cada um dos n sistemas

$$\dot{x}(t) = (A_i + B_i K)x(t). \tag{9}$$

A coleção de sistemas (9) é simultaneamente estabilizável, se existe uma única lei de controle que garante a estabilização de cada um dos n sistemas.

Teorema 3.4. *A coleção de sistemas (9) é simultaneamente estabilizável, se existem matrizes $P = P^T \succ 0, W = W^T \succ 0$ e $Z \in \mathbb{R}^{p \times m}$ que satisfazem às seguintes LMIs*

$$A_i W + W A_i^T + B_i Z + Z^T B_i^T \prec 0. \tag{10}$$

Além disso, o ganho do controlador do sistema é dado por $K = ZW^{-1}$ e $P = W^{-1}$.

Demonstração. Ver [5]. □

DOI: 10.5540/03.2016.004.01.0035

Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 4, N. 1, 2016.

4 Resultados

A principal contribuição desse trabalho consiste na criação e implementação do pacote *estabilidade* em linguagem R, que resolve problemas de estabilidade e estabilização de sistemas lineares no tempo contínuo. Este pacote utiliza o método projetivo de Nemiroviskii e Gahinet [6] e resolve problemas de PSD por meio das funções: *projective_feasi* e *projective_sdp*, implementadas no MATLAB por Antoniou e Lu [1] e adaptadas em linguagem R por Gomes [5], em um pacote denominado *projetivo*.

A função *projective_sdp* utiliza o método projetivo para resolver o problema de PSD (1) e apresenta-se na forma

$$projective\_sdp(FF, F_0, c, epsi),$$

em que F_0 é a matriz constante, $FF = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & \cdots & F_n \end{bmatrix}$ é formada pela concatenação das matrizes F_i, c é o vetor custo e $epsi$ representa o critério de parada.

O pacote *estabilidade* utiliza o pacote *projetivo*, sendo composto pelas seguintes funções:

- *pjSdpLyapMA* e *pjFactLyapMA* - resolvem problemas de estabilidade de sistemas lineares contínuos ou discretos em malha aberta com uma ou mais matrizes de estado. Utilizam as funções *projective_sdp* e *projective_feasi*, respectivamente.
- *pjFactLyapMF* - resolve problemas de estabilização de sistemas lineares contínuos ou discretos, com uma ou mais matrizes de estado. Utiliza a função *projective_feasi*.

A função *pjSdpLyapMA* investiga a estabilização assintótica e estabilidade simultânea de sistemas lineares. Para facilitar a entrada dos dados, a variável matricial P é representada pela combinação linear das k matrizes M_i que compõem a base canônica do espaço das matrizes simétricas, isto é,

$$P = \sum_{i=1}^{k} x_i M_i \tag{11}$$

Substituindo (11) nas restrições do problema (6), este pode ser reescrito como

$$\begin{array}{ll} \min & trace(\sum_{i=1}^{k} x_i M_i) \\ s.a & -F_0 + \sum_{i=1}^{k} x_i F_i \succ 0 \end{array} \tag{12}$$

em que

$$F_i = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -A_1^T M_i - M_i A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -A_2^T M_i - M_i A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -A_n^T M_i - M_i A_n \end{bmatrix} & O \\ O & M_i \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$F_0 = -\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q \end{bmatrix} & O \\ O & O \end{bmatrix} \tag{14}$$

Note que as matrizes F_i e F_0 são utilizadas para calcular os parâmetros de entrada da função *projective_sdp*. Além disso, a notação O representa uma matriz nula de dimensão apropriada.

A função *pjSdpLyapMA* implementada apresenta a seguinte forma

$$pjSdpLyapMA(t, A, n),$$

em que t assume "c" se o sistema for contínuo ou "d" se o sistema for discreto, n é o número de inequações de Lyapunov do sistema e A é formada pela concatenação das matrizes A_i, isto é, $A = \left[\begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{array}\right]$.

A função *pjSdpLyapMA* apresenta na saída uma lista contendo os elementos: P é a variável matricial, *obj* é o valor da função objetivo e *int* é o número de iterações.

A função *pjFactLyapMF* investiga a estabilização simultânea de sistemas lineares. Para facilitar a entrada dos dados, as variáveis matriciais W e Z são representadas pela combinação linear das matrizes M_i (que compõem a base canônica das matrizes simétricas) e das matrizes N_i (que compõem a base canônica do espaço das matrizes $p \times m$), isto é,

$$W = \sum_{i=1}^{v} x_i M_i \quad \text{e} \quad Z = \sum_{i=v+1}^{v+pm} x_i N_i \tag{15}$$

Análogo ao sistema em malha aberta, substitui-se (15) nas restrições LMIs (10), obtendo-se

$$F_0 + \sum_{i=1}^{v} x_i F_i + \sum_{i=v+1}^{v+pm} x_i F_i \succ 0.$$

A função *pjFactLyapMF* implementada apresenta a seguinte forma

$$pjFactLyapMF(t, A, B, n, ne),$$

em que ne é o número de entradas do sistema, A é a concatenação das matrizes dinâmicas e B é a concatenação das matrizes de controle.

A seguir, o código-fonte em R da função que gera as matrizes N_i na Equação (15).

```
base_full = function (p,m) {
# gera a base canonica de uma matriz completa
# p - numero de linhas da matriz e m - numero de colunas da matriz
Bf <- matrix(0, nrow=p,ncol=(m*p*m))
desloc <- 0
for (i in 1:p) {
  for (j in 1:m) {
      ifi1 <- j + m * (j-1) + desloc
      Bf[i,ifi1] <- 1 }
    desloc <- ifi1 }
return(Bf)
}
```

Exemplo 4.1. *Considere um sistema dinâmico modelado pelas matrizes:*

$$A_1 = \begin{pmatrix} -0,1283 & 1,2460 & -0,3600 \\ -1,4462 & -1,6390 & -0,1356 \\ -0,7012 & 0,5774 & -2,3493 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -4,2705 & -0,7990 & -0,0562 \\ 0,9846 & -3,7652 & -0,0562 \\ -0,0449 & -0,8617 & 2,6033 \end{pmatrix}$$

Utiliza-se a função pjSdpLyapMA para resolver o problema de PSD (12) com $Q = I_3$ *e* $c = [1, 0, 1, 0, 0, 1]$.

As seis matrizes $F_i \in \mathbb{R}^{9\times 9}$ *e a matriz* $F_0 \in \mathbb{R}^{9\times 9}$ *foram obtidas aplicando as equações (13) e (14), respectivamente. Desse modo a matriz* $FF = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & \cdots & F_6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{9\times 54}$ *pode ser facilmente encontrada. A solução obtida foi*

$$P = \begin{pmatrix} 1,1695 & 0,3453 & -0,2130 \\ 0,3453 & 0,5394 & -0,0798 \\ -0,2130 & -0,0798 & 0,2501 \end{pmatrix}.$$

Verifica-se que o sistema é simultaneamente estável pois $P \succ 0$.

Para validar o Exemplo (4.1) foi utilizada a função *solvesdp* do YALMIP que resolve o problema (12) da seguinte forma: $solvesdp(F, fobj, options)$, em que $fobj = trace(P)$ e

$$F = set(P > 0) + set(A_1' * P + P * A_1 + Q < 0) + set(A_2' * P + P * A_2 + Q < 0).$$

Após 7 iterações foi encontrada a mesma matriz P cujo traço vale $1,9590$.

Exemplo 4.2. *Considere um sistema com três plantas e duas entradas, dado por:*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0,4110 & 0,2306 & 0,9781 \\ 0,7211 & 0,1848 & 0,9356 \\ 0.7308 & 0,8728 & 0,0974 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0,9354 & 0,3231 \\ 0,1556 & 0,6045 \\ 0,7070 & 0,2358 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0,2438 & 0,1541 & 0,1491 \\ 0,9712 & 0,5186 & 0,5034 \\ 0.5141 & 0,7931 & 0,6895 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0,5819 & 0,0291 \\ 0,8581 & 0,5137 \\ 0,5169 & 0,4879 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0,9231 & 0,5070 & 0,1449 \\ 0,5832 & 0,7966 & 0,9927 \\ 0.9875 & 0,6413 & 0,7770 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0,7426 & 0,4909 \\ 0,4802 & 0,5231 \\ 0,0606 & 0,8582 \end{pmatrix}$$

Note que o sistema em malha aberta é instável como mostra a Tabela 1.

Tabela 1: Autovalores das matrizes dinâmicas em malha aberta.

matriz	autovalores	
A_1	$1,7085;$	$-0,2172; \quad -0,7990$
A_2	$1,4342;$	$0,0089 \pm 0,0324j$
A_3	$2,0577;$	$0,2195 \pm 0,2111j$

Utiliza-se a função pjFactLyapMF para encontrar uma única matriz de ganho K *que garanta a estabilização de cada um dos três sistemas, em que*

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{bmatrix}, \quad n = 3 \quad e \quad ne = 2.$$

Os resultados obtidos foram

$$P = \begin{pmatrix} 1,4506 & -0,1614 & -0,5886 \\ -0,1614 & 1,7477 & 0,573 \\ -0,5886 & 0,5723 & 1,4054 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} -1,5720 & -0,5766 & 0,2680 \\ 0,6419 & -1,6546 & -2,4965 \end{pmatrix}.$$

que estabiliza cada sistema como mostra a Tabela 2.

Tabela 2: Autovalores das matrizes dinâmicas em malha fechada.

matriz	autovalores
$A_1 + B_1K$	$-0,8043 \pm 0,8921j$; $-0,7990$
$A_2 + B_2K$	$-0,1191$; $-0,6655$; $-1,0838$
$A_3 + B_3K$	$-0,7092 \pm 0,8911j$; $-0,2058$

5 Conclusões

Este trabalho abordou o estudo e a implementação de pacotes para resolver o problema de estabilidade e estabilização de sistemas lineares em tempo contínuo. Para resolver computacionalmente tais problemas foi utilizado o método projetivo que foi adaptado em linguagem R em um pacote chamado *projetivo*.

Os pacotes foram testados e os resultados obtidos foram comparados com os pacotes computacionais SeDuMi e o toolbox YALMIP, apresentando resultados satisfatórios para os fins propostos neste trabalho.

Referências

[1] A. Antoniou and W. Lu, Practical Optimization, Algorithms and Engineering Applications, Springer Science, (2007), DOI: 10.1007/s40314-014-0163-6.

[2] S. Boyd, L. Vandenberghe, E. Feron and V. Balakrishnan, Linear Matrix in System and Control Theory, SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia (1994).

[3] S. Boyd and L. Vandenberghe, Semidefinite Programming, SIAM Review, vol.38, 49–95, (1996).

[4] J.D. Ferreira, Análise e controle de sistemas lineares via desigualdades matriciais convexas, Dissertação de Mestrado em Engenharia Elétrica, Unicamp, 1994.

[5] W. M. M. Gomes, Estabilidade e Estabilização de Sistemas Lineares Incertos via Programação Semidefinida, Dissertação de Mestrado em Ciência da Computação, UFMA, (2014).

[6] A. Nemirovskii and P. Gahinet, The projective method for solving linear matrix inequalities, Proceedings of American Control Conference, vol. 2, 63–72, (1994).

[7] R CORE TEAM, R: A Language and Environment for Statistical Computing, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, (2015). http://www.R-projet.org/

