

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Estabilização Robusta da Qualidade da Água de Rios via LMIs

Valeska Martins de Souza¹

Departamento de Matemática, UFMA, São Luis, MA

Waldelene Maria Moura Gomes²

Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, UFMA, São Luís, MA

Angel Fernando Torrico Cáceres³

Departamento de Engenharia de Eletricidade, UFMA, São Luis, MA

Resumo Este trabalho aborda a estabilização robusta da qualidade da água de rios, onde é idealizado um controlador utilizando dados reais de um segmento de rio. Resolve-se o problema utilizando LMIs através de pacotes implementados na linguagem R. A eficiência do ganho de controle obtido é avaliado através de simulações.

Palavras-chave. Estabilização Robusta. Qualidade da Água de Rios. Linguagem R. LMIs.

1 Introdução

Nas últimas décadas, problemas de otimização convexa têm sido uma das áreas de pesquisa mais ativas na otimização. Este interesse foi estimulado pela descoberta de importantes aplicações na teoria de sistemas de controle e o desenvolvimento de eficientes algoritmos de pontos interiores para resolver tais aplicações. Muitos desses problemas podem ser formulados como problemas de otimização convexa usando desigualdades matriciais lineares (LMIs) [3].

Atualmente existe um grande interesse em preservar a qualidade da água dos rios prejudicada por excessivas descargas industriais e efluentes municipais. Os principais indicadores nesse processo são as concentrações do Oxigênio Dissolvido (OD) no interior do rio e da Demanda Bioquímica de Oxigênio (DBO) que representa as substâncias que causam a diminuição do oxigênio na água, principalmente pela biodegradação de matérias orgânicas.

Estes parâmetros, relacionados entre si, precisam ser mantidos dentro de níveis específicos, de forma a tornar aceitável a qualidade da água. Para isto, propõe-se um projeto

¹valeska.martins@ufma.br

²waldelene@yahoo.com.br

³ftorrico@dee.ufma.br

de controle utilizando LMIs para a estabilização robusta, direcionada de tal forma a manter esses parâmetros dentro desses níveis, por meio de efluentes controlados de tratamento de água.

2 Estabilização Robusta

Sistemas lineares com incertezas são encontrados em diversas aplicações da engenharia. Neste trabalho considera-se o seguinte sistema linear com incertezas politópicas, representado no espaço de estados a tempo contínuo

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t) \quad (1)$$

em que $x \in R^m$ é o vetor de estado, $u \in R^p$ é o vetor de controle, $A(\alpha) \in R^{m \times m}$ é a matriz que representa a dinâmica do sistema e $B(\alpha) \in R^{m \times p}$ é a matriz de controle.

As matrizes $A(\alpha)$ e $B(\alpha)$ não são exatamente conhecidas, mas pertencem a um conjunto convexo e fechado (politopo) definido por

$$\mathcal{D} = \left\{ (A, B)(\alpha) : A(\alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i; B(\alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha_i B_i; \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\} \quad (2)$$

em que as matrizes A_i são conhecidas e representam os vértices do politopo, e os escalares α_i definem a combinação convexa entre estes vértices.

O problema da estabilização consiste em encontrar uma lei de controle $u(t) = Kx(t)$ de tal forma que o sistema em malha fechada $\dot{x}(t) = (A(\alpha) + B(\alpha)K)x(t)$ seja assintoticamente estável para todo D .

Uma condição suficiente para a estabilidade do politopo D é dada pela existência de uma matriz de Lyapunov $P = P^T$, tal que, $(A(\alpha) + B(\alpha)K)^T P + P(A(\alpha) + B(\alpha)K) \prec 0$ e $P \succ 0$ sejam verificadas para todo $(A, B) \in D$ [10].

O sistema (1) é robustamente estabilizável se e somente se, existem matrizes $P = P^T \succ 0$, $W = W^T \succ 0$ e Z que satisfazem a seguinte LMI

$$A(\alpha)W + WA(\alpha)^T + B(\alpha)Z + Z^T B(\alpha)^T \prec 0. \quad (3)$$

Além disso, o ganho do controlador do sistema é dado por $K = ZW^{-1}$.

Theorem 2.1. *O sistema linear incerto (1) com incertezas politópicas, é robustamente estabilizável se e somente se, existem matrizes $W = W^T \succ 0$ e Z que satisfazem as seguintes LMIs*

$$A_i W + W A_i^T + B_i Z + Z^T B_i^T \prec 0. \quad (4)$$

Além disso, o ganho do controlador é dado por $K = ZW^{-1}$ e $P = W^{-1}$.

Demonstração. Ver [5].

□

3 Estabilização Robusta utilizando a Linguagem R

Afim de resolver problemas de estabilidade e estabilização robusta de sistemas lineares foi criado e implementado um pacote na linguagem R [7] denominado *estabilidade*. Este pacote utiliza o método projetivo de Nemirovskii e Gahinet [6] para resolver LMIs por meio dos solvers: *projetivo_feasi* e *projective_sdp*, implementados no MATLAB por Antoniou e Lu [1] e adaptados por Gomes [5] na linguagem R, em um pacote denominado *projetivo*.

No pacote *estabilidade*, a função *pjFactRobMF* investiga a estabilização robusta de um sistema incerto (1) com incertezas politópicas. Para facilitar a entrada dos dados, a matriz $A(\delta)$ é decomposta como a soma de $(d + 1)$ matrizes, isto é, $A(\delta) = M + \sum_{i=1}^d \delta_i N_i$, em que M é a matriz de coeficientes constantes, N_i é a matriz dos coeficientes referentes a i -ésima incerteza δ_i e d é o número de incertezas.

Apresenta-se da seguinte forma

$$pjFactRobMF(t, M, Delta, Lim, B, ne),$$

em que t assume dois valores: “ c ” se o sistema for contínuo no tempo ou “ d ” se for discreto; M é a matriz de coeficientes constantes; $Delta = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_d]$ é formada pela concatenação das matrizes dos coeficientes de cada incerteza; Lim é a matriz formada

pelos limitantes inferiores e superiores das d incertezas, isto é, $Lim = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & \dots & l_{d1} \\ l_{12} & l_{22} & \dots & l_{d2} \end{bmatrix}^T$

em que l_{i1} e l_{i2} representam, respectivamente, o limitante inferior e superior da incerteza δ_i , isto é, $l_{i1} \leq \delta_i \leq l_{i2}$; $B = [B_1 \ B_2 \ \dots \ B_{2d}]$ é formada pela concatenação das matrizes de controle B_i e ne é o número de entradas do sistema.

A função *pjFactRobMF* apresenta na saída uma lista contendo os seguintes elementos:

- W e Z que são soluções das LMIs (4).
- $P = W^{-1} \succ 0$.
- *int* corresponde ao número de iterações.
- K que é o ganho do controlador de realimentação de estado.
- A_1, A_2, \dots, A_{2d} são as matrizes vértices do politopo.

4 Estabilização Robusta da Qualidade da Água de Rios

Muitos modelos que descrevem o comportamento das concentrações de DBO e OD nos rios seguem os modelos clássicos de Streeter-Phelps [8], cujas equações apresentam duas taxas denominadas taxa de remoção do DBO (K_l) e taxa de rereação atmosférica relacionada ao OD (K_r), as quais dependem de vários fatores, entre eles, a velocidade do fluxo, temperatura e volume da água. Neste trabalho a estabilização robusta considera a variação destas taxas conforme Figura 1.

4.1 Modelamento do OD e do DBO em segmentos de rios

Para o modelamento, divide-se o curso natural dos rios em segmentos de comprimentos adequados (subsistemas). Cada segmento é considerado como sendo um reservatório reator

agitado de fluxo contínuo, em que podem ser aplicadas as relações de Streeter-Phelps onde são incluídos efluentes de controle [4, 9]. A Figura 2 ilustra esta divisão.

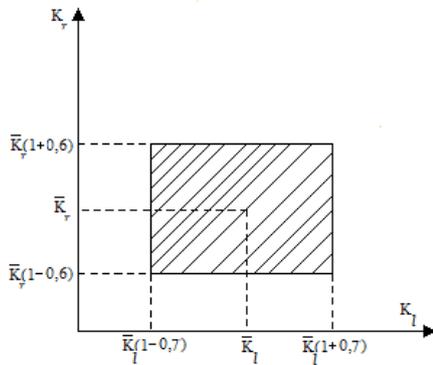


Figura 1: Variação das taxas K_r e K_l para $-0,7 \leq \delta \leq 0,7$ e $-0,6 \leq \gamma \leq 0,6$

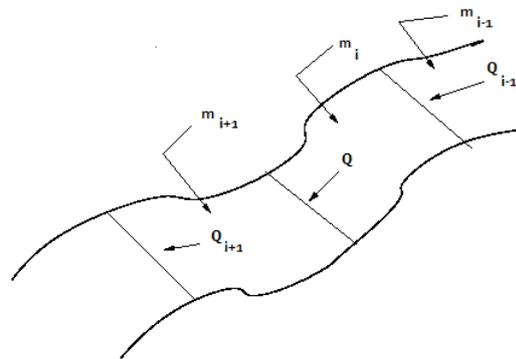


Figura 2: Segmentos de rio

Assim, o modelo de cada segmento é dado por

$$\frac{dL_i}{dt} = \left[-K_{li} - \frac{(Q_i + Q_{ei})}{V_i} \right] L_i + \frac{Q_{i-1}}{V_i} L_{i-1} + \frac{Q_{ei}}{V_i} m_i \quad (5)$$

$$\frac{dq_i}{dt} = -K_{li} L_i + \frac{Q_{i-1}}{V_i} q_{i-1} - \frac{(Q_i + Q_{ei})}{V_i} q_i - \frac{\eta_i}{V_i} + K_{ri}(q_i^s - q_i), \quad (6)$$

em que Q_{i-1} e Q_i são as vazões; L_{i-1} e L_i as concentrações de DBO; q_{i-1} e q_i as concentrações de OD nos segmentos $(i - 1)$ e i , respectivamente. Q_{ei} é a vazão do afluente de controle, K_{li} é a taxa de decaimento do DBO, m_i é a concentração de DBO do efluente de controle, q_i^s é a concentração de saturação do OD, K_{ri} é a taxa de reoxigenação, V_i é o volume e $\frac{\eta_i}{V_i}$ é o OD devido a ação do lodo no segmento i .

Considerando o déficit de OD e fazendo a seguinte mudança de variáveis: $w_i = (q_i^s - q_i)$ e $w_{i-1} = (q_{i-1}^s - q_{i-1})$, a Equação (6) torna-se

$$\frac{dw_i}{dt} = K_{li} L_i + \frac{Q_{i-1}}{V_i} w_{i-1} - \left[K_{ri} + \frac{(Q_i + Q_{ei})}{V_i} \right] w_i + \frac{\eta_i}{V_i} - \frac{Q_{i-1}}{V_i} q_{i-1}^s + \frac{(Q_i + Q_{ei})}{V_i} q_i^s \quad (7)$$

Em Tamura [9], é apresentada uma descrição mais realista nos cursos de água com múltiplos poluentes, onde são considerados atrasos de transporte distribuídos entre os segmentos, definidos por

$$L_{i-1} = \sum_{j=1}^3 a_j L_{i-1}(t - \phi_j) \quad \text{e} \quad w_{i-1} = \sum_{j=1}^3 a_j w_{i-1}(t - \phi_j) \quad (8)$$

em que $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = 0,5$, $\phi_3 = 1$, $a_1 = 0,15$, $a_2 = 0,7$ e $a_3 = 0,15$.

Para lidar com esses atrasos, emprega-se a expansão em série de Taylor, por exemplo, para $\phi_2 = 0,5$ e $i = 2$, define-se duas variáveis adicionais no termo $L_{i-1}(t - \phi_j)$ da

seguinte forma: seja $L_{21} = L_1(t - 0,5)$, sua transformada de Laplace é $L_{21}(s) = L_1(s)e^{-0,5s} = L_1(s)[1 + 0,5s + \frac{0,25}{2}s^2 + \dots]^{-1}$. Considerando os três primeiros termos da série, tem-se $L_{21}(s) = \frac{L_1(s)}{1 + 0,5s + \frac{0,25}{2}s^2}$, que no domínio do tempo torna-se $L_1(t) = L_{21}(t) + 0,5\dot{L}_{21}(t) + 0,125\ddot{L}_{21}(t)$.

Definindo $\dot{L}_{21} = L_{22}$, obtem-se $\dot{L}_{22} = 8L_1 - 8L_{21} - 4L_{22}$. Aplicando este mesmo procedimento em todos os atrasos da Equação (8), gera-se um modelo linear no espaço de estados.

Neste modelamento é considerado dois segmentos de rio com características iguais e para fins de estudo do controle robusto, supõe-se que os parâmetros incertos são $K_{li} = K_l$ e $K_{ri} = K_r$, que variam de acordo com

$$K_l = (1 + \delta)\bar{K}_l \quad \text{e} \quad K_r = (1 + \gamma)\bar{K}_r \tag{9}$$

em que $b \leq \delta \leq c$ e $f \leq \gamma \leq g$, com b, c, f e $g \in R$.

Utiliza-se os seguintes dados reais de um segmento do rio CAM na Inglaterra [2] :

$$\begin{aligned} \frac{n_i}{V_i} &= 0,1 [mg/litro][dia^{-1}], & \frac{Q_{ei}}{V_i} &= 0,1 [dia^{-1}], & \frac{Q_i}{V_i} &= \frac{Q_{i-1}}{V_i} = 0,9 [dia^{-1}], \\ L_0 &= 0 [mg/litro], & q_0 &= 10 [mg/litro], & q_i^s &= q_{i-1}^s = 10 [mg/litro]. \end{aligned} \tag{10}$$

Assim, as Equações (5) e (7), para $i = 1, 2$, podem ser expressas por

$$\dot{x} = Ax + Bu + d \tag{11}$$

$$y = Cx \tag{12}$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} -K_l - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_l & -K_r - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,135 & 0 & -K_l - 1 & 0,63 & 0 & 0,135 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -8 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,135 & K_l & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_r - 1 & 0,63 & 0 & 0,135 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0,1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1,1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1,1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} L_1 \\ w_1 \\ L_2 \\ L_{21} \\ L_{22} \\ L_{23} \\ L_{24} \\ w_2 \\ w_{21} \\ w_{22} \\ w_{23} \\ w_{24} \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} L_1 \\ w_1 \\ L_2 \\ w_2 \end{bmatrix}.$$

Na matriz de estados (13), os valores incertos K_l e K_r variam conforme (9), em que $\bar{K}_l = 0,32 [dia^{-1}]$, $\bar{K}_r = 0,2 [dia^{-1}]$, $-0,7 \leq \delta \leq 0,7$ e $-0,6 \leq \gamma \leq 0,6$.

4.2 Estabilização robusta

Nesse problema, supõe-se que o rio não está poluído no segmento 0, portanto, as condições de regime para o DBO e déficit de OD são $L_0^* = 0$ e $w_0^* = 0$, respectivamente. Para os segmentos 1 e 2, define-se $w_1^* = 2$ e $w_2^* = 4$ como condições de regime desejadas. Os demais valores de regime são calculados igualando-se a equação de estados (11) a zero, obtendo-se $L_1^* = 4,06$, $L_2^* = 5,94$, $m_1^* = 53,5$ e $m_2^* = 41,9$, portanto $q_1^* = q_1^s - w_1^* = 8$ e $q_2^* = q_2^s - w_2^* = 6$. Assim, encontrados os vetores de regime x^* e u^* , a equação de estados (11) é redefinida da seguinte maneira

$$\dot{z} = Az + Bv \tag{14}$$

em que $z = x - x^*$ e $v = u - u^*$.

Definindo-se, a lei de controle $v = Kz$ na Equação (14) e aplicando o Teorema 2.1, encontra-se o ganho do controlador K utilizado na estabilização robusta da qualidade da água do rio.

5 Resultados

Utilizou-se a função $pjFactRobMF(t, M, Delta, Lim, B, ne)$, em que $t = "c"$, $Lim = \begin{bmatrix} -0,7 & 0,7 \\ -0,6 & 0,6 \end{bmatrix}$ e $ne = 2$. De acordo com a Seção 3, as matrizes M e $Delta$ são construídas a partir da matriz de estado (13), cuja saída apresenta quatro matrizes vértices do politopo e o ganho do controlador dado por

$$K = \begin{bmatrix} 10.1861 & -17.1149 & -1.0526 & -30.0053 & -33.8609 & -3.8366 & -7.0283 & 0.5265 & 13.1225 & 7.4042 & -0.3160 & -1.0986 \\ 1.0794 & 5.3837 & 0.2058 & -7.2761 & -0.3371 & -1.5133 & -0.1722 & 1.2568 & -5.6021 & -3.8734 & -0.5145 & -0.2672 \end{bmatrix}$$

Assim, os efluentes de controle utilizam a lei de controle $u = K(x - x^*) + u^*$ na estabilização robusta do sistema.

Afim de verificar a eficácia do ganho do controlador, foram feitas simulações para um estado inicial $x_0 = [10 \ 5 \ 5,94 \ 4,06 \ 0 \ 4,06 \ 0 \ 4 \ 2 \ 0 \ 2 \ 0]^T$, onde foram verificados os comportamentos das concentrações de DBO e OD do sistema, considerando o controle com um ganho K aplicado às quatro matrizes vértices. Estes resultados foram comparados ao mesmo sistema, considerando as matrizes vértices sem o controle, ou seja, os efluentes são sempre constantes, $u = u^* = \begin{bmatrix} m_1^* & m_2^* \end{bmatrix}^T$. As Figuras 3 e 4 ilustram as respectivas simulações.

Verificou-se que o sistema em malha fechada é estabilizável nos níveis desejados L_1^* , L_2^* , q_1^* e q_2^* a partir do sexto dia para todas as incertezas em K_l e K_r , enquanto que, para um sistema não controlado para as mesmas variações das incertezas, os níveis desejados não são atingidos no mesmo período de tempo.

6 Conclusão

A estabilização robusta proposta neste trabalho, mostrou-se eficiente para variações das incertezas nos intervalos propostos. Verificou-se também que o pacote *estabilidade* implementado, é uma ferramenta computacional eficaz, portanto pode ser útil na resolução de problemas de controle.

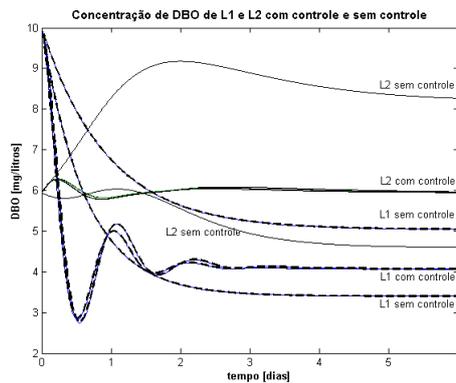


Figura 3: Concentração de DBO

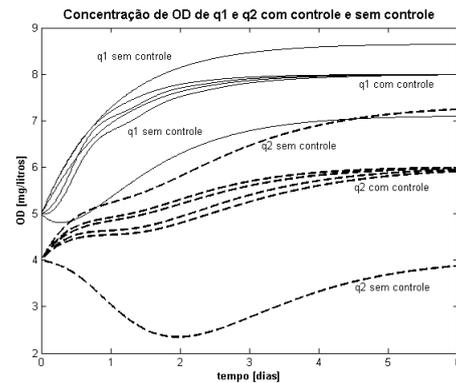


Figura 4: Concentração de OD

Referências

- [1] A. Antoniou and W. Lu. *Practical Optimization: Algorithms and Engineering Applications*. Springer Science, (2007).
- [2] M.B Beck and P.C Young. The modelling and control of water quality in a river system. *Automatica* , vol. 10:445–468, (1974).
- [3] S. Boyd, L. Vandenberghe, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, (1994).
- [4] A. F. T. Cáceres. *Controle Descentralizado: Técnicas e Aplicação ao Controle da Qualidade da Água de Rios*. Mestrado em Engenharia Elétrica, UNICAMP, (1992).
- [5] W. M. M. Gomes. *Estabilidade e Estabilização de Sistemas Lineares Incertos via Programação Semidefinida*. Mestrado em Ciência da Computação, UFMA, (2014).
- [6] A. Nemirovskii and P. Gahinet. The projective method for solving liner matrix inequalities. *Proceedings of American Control Conference*, vol. 1:840–844, (1994).
- [7] R Development Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, (2013).
- [8] H. W. Streeter and Phelps E. B. A study of the pollution and natural purification of the ohio river. *Public Health Bulletin*, vol. 146, (1925).
- [9] H. Tamura. A discrete dynamic model with distributed transport delays and its hierarchical optimization for preserving stream quality. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 4:424–431, (1974).
- [10] J. S. Leite Valter, P. J. Oliveira, D. C. W. Ramos, V. F. Montanger, R. C. L. F. Oliveira, e P. L. D. Peres. Estabilidade robusta de sistemas lineares através de desigualdades matriciais lineares. *Revista Controle e Automação*, vol. 15:24–40, (2004).