

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

---

# Redução de Ordem de Modelos NARX-OBF Utilizando Algoritmos Genéticos: Identificação de um Levitador Magnético

Elder Oroski<sup>1</sup>

Departamento de Eletrotécnica, UTFPR, Curitiba, PR

Adolfo Bauchspiess<sup>2</sup>

Departamento de Engenharia Elétrica, UnB, Brasília, DF

Marco Egito Coelho<sup>3</sup>

Departamento de Engenharia Elétrica, UnB, Brasília, DF

**Resumo.** A identificação de sistemas não lineares pode constituir uma tarefa bastante difícil, tanto sob o aspecto de adequação do modelo, quanto da obtenção dos seus parâmetros. Neste contexto, o objetivo deste trabalho é a identificação, em malha fechada, de um levitador magnético, a partir de modelos NARX-OBF (*Nonlinear Auto Regressive with eXogenous Input-Orthonormal Basis Function*), realizando a redução de ordem do modelo encontrado. Para tanto, foi proposto um Algoritmo Genético (AG), em hibridização com o método de Levenberg Marquardt (LM), para obtenção simultânea dos parâmetros do modelo e para a realização da redução de ordem do mesmo. A utilização das funções OBF visa reduzir o número termos dos modelos NARX. A partir dos experimentos realizados, pode-se concluir que os modelos NARX-OBF simplificados, ou seja, com redução de ordem, apresentaram um erro médio quadrático não muito inferior ao dos modelos NARX-OBF completos.

**Palavras-chave.** NARX-OBF, Algoritmos Genéticos, Identificação de Sistemas.

## 1 Introdução

A fusão dos modelos polinomiais NARX e das funções OBF surge da necessidade de redução do número de termos da série que compõem o modelo NARX. Uma vez que o número de termos possíveis em modelos polinomiais cresce bastante com o aumento do grau de não-linearidade de um sistema [1]. Assim, com a utilização das funções ortonormais, corretamente parametrizadas, busca-se compactar a série que implementa o modelo NARX, isto sem a perda da capacidade de representação deste tipo de modelo.

Os termos mais representativos de um modelo NARX-OBF ainda podem ser selecionados por um algoritmo heurístico, como o Algoritmo Genético (AG), com uma função de

---

<sup>1</sup>oroski@utfpr.edu.br

<sup>2</sup>adolfo@ene.unb.br

<sup>3</sup>egito@ene.unb.br

avaliação inspirada no critério de informação de *Akaike* [3]. Como este critério quantifica a redução da variância dos resíduos, com a inclusão de um novo termo na série, e ao mesmo tempo penaliza a inserção deste termo, [2], pode-se afirmar que cada possível solução, dentro da população do AG, passa a representar a busca pela minimização conjunta da variância do resíduos e do número de termos que compõem o modelo.

Este trabalho segue a seguinte estrutura: na seção 2 deste artigo são apresentadas os modelos NARX-OBF. Na seção 3 é apresentado método de busca pelos parâmetros do modelo. Já na seção 4 é exposto o sistema a ser identificado. Na seção 5 são apresentados os resultados obtidos na identificação deste sistema. E finalmente, na seção 6 são apresentadas as conclusões deste artigo.

## 2 Modelos NARX-OBF

Nesta seção são expostas as funções ortonormais e a sua fusão com os modelos NARX.

### 2.1 Funções Ortonormais

As funções ortonormais atendem as seguintes propriedades: (i)  $\langle \psi_m, \psi_n \rangle = 0$  para  $m \neq n$ ; e (ii)  $\langle \psi_m, \psi_n \rangle = 1$  para  $m = n$ ; sendo  $\psi_m$  e  $\psi_n$  funções ortonormais e  $\langle \cdot \rangle$  o seu produto interno, dado por (1):

$$\langle \psi_m(k), \psi_n(k) \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_m(k) \psi_n^*(k). \quad (1)$$

Assim, pode-se afirmar que as funções ortonormais atendem os seguinte requisitos:

(i)  $\psi_m \perp \psi_n = 0$ , para  $m \neq n$ ; e (ii)  $|\psi_n| = 1 \forall n$ ; sendo  $|\psi_n| = \sqrt{\langle \psi_n, \psi_n \rangle}$ .

As principais funções ortonormais são as funções de Hermite, Jacobi, Laguerre, Legendre, Kautz e as GOBFs (*Generalized Orthonormal Basis Functions*) [4]. Ressalta-se que neste trabalho são utilizadas as funções ortonormais de Kautz.

### 2.2 Funções de Kautz

As funções de Kautz são ortonormais e possuem polos complexos [7]. Tais funções podem ser expressas por (2) e (3):

$$K_{2m}(z) = \frac{\sqrt{(1-c^2)(1-b^2)}}{z^2 + b(c-1)z - c} \left[ \frac{-cz^2 + b(c-1)z + 1}{z^2 + b(c-1)z - c} \right]^{m-1}, \quad (2)$$

$$K_{2m-1}(z) = \frac{z(z-b)\sqrt{1-c^2}}{z^2 + b(c-1)z - c} \left[ \frac{-cz^2 + b(c-1)z + 1}{z^2 + b(c-1)z - c} \right]^{m-1}, \quad (3)$$

em que  $K_{2m}(z)$  e  $K_{2m-1}(z)$  são as funções pares e ímpares de Kautz, respectivamente.  $\beta$  e  $\bar{\beta}$  são os polos que parametrizam estas funções. Os termos  $b$  e  $c$  podem ser expressos pelas equações (4) e (5).

$$b = (\beta + \bar{\beta}) / (1 + \beta\bar{\beta}), \tag{4}$$

$$c = -\beta\bar{\beta}. \tag{5}$$

O uso de funções ortonormais em alguns modelos não lineares, como o modelo de Volterra, é uma forma interessante de reduzir o número de termos necessários para compor estes modelos [6, 9]. Neste contexto, na próxima seção serão apresentados os modelos NARX associados a estas funções OBF.

### 2.3 Modelo NARX-OBF

O modelo NARX-OBF nasce da fusão dos modelos NARX com as funções ortonormais, inspirado pela fusão dos modelos de Volterra com as funções ortonormais, gerando os modelos Volterra-OBF [8]. Tal modelo pode ser matematicamente definido a partir da seguinte equação:

$$\hat{y}(k) = M_u(k) + M_y(k) + M_{uy}(k), \tag{6}$$

em que  $M_u(k)$ ,  $M_y(k)$  e  $M_{uy}(k)$  são expressos pelas Equações (7), (8) e (9).

$$M_u = \sum_{m=1}^n c_m^u w_m^u + \sum_{p=1}^n \sum_{q=p}^n c_{p,q}^u w_p^u w_q^u. \tag{7}$$

$$M_y = \sum_{m=1}^m c_n^y w_m^y + \sum_{p=1}^n \sum_{q=p}^n c_{p,q}^y w_p^y w_q^y. \tag{8}$$

$$M_{uy} = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n c_{p,q}^{uy} w_p^u w_q^y. \tag{9}$$

Este modelo, NARX-OBF, pode ser expresso em forma de filtros concatenados, conforme a Figura 1, sendo que as operações expressas pelas Equações (7), (8) e (9) são representadas pelo operador  $\mathcal{H}$ .

## 3 Seleção dos Parâmetros do Modelo NARX-OBF

Para a determinação da estrutura e dos parâmetros de um modelo NARX-OBF propõe-se a utilização de um Algoritmo Genético (AG) combinado com o método de Levenberg-Marquardt (LM). Neste contexto, o AG é utilizado na definição da estrutura do modelo, ou seja, na determinação de quais termos do modelo NARX-OBF devem compor o modelo

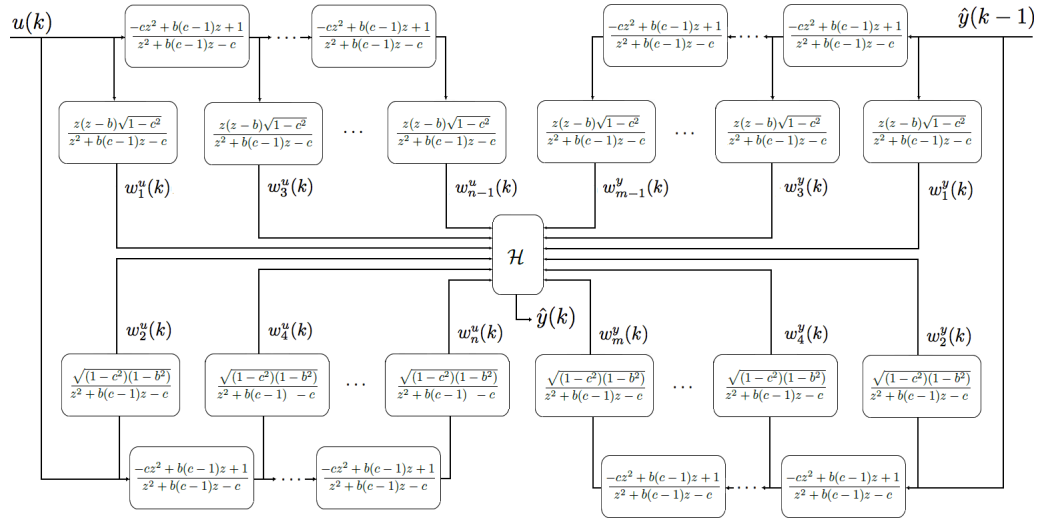


Figura 1: Modelo NARX-OBF em forma de filtros concatenados.

simplificado. O AG é utilizado também na busca do polo que parametriza as funções ortonormais, enquanto o método de Levenberg-Marquardt é utilizado para encontrar os coeficientes deste modelo.

Para que o AG realize uma seleção dos termos mais relevantes do modelo, sua função de avaliação (*fitness*) considera tanto a minimização do erro médio quadrático (*EMQ*) quanto a redução do número de termos *NC* do modelo. Tal função, expressa em (10), foi inspirada pelo critério de AKAIKE [3].

$$fitness = N.EMQ + NC.log(N), \tag{10}$$

em que *N* é o número de amostras realizadas sobre os sinais de entrada e saída do sistema, *EMQ* é o erro médio quadrático e *NC* é o número de coeficientes envolvidos no modelo.

Para cada termo do modelo NARX-OBF existe um gene,  $p_n$ , que pode assumir valores  $\{0, 1\}$ . Caso este gene possua valor 1, o termo NARX-OBF a ele associado é mantido no modelo, caso seja 0 o mesmo é desconsiderado no modelo. Assim, a dinâmica evolutiva do AG torna-se responsável por selecionar quais os termos do modelos são representativos para o sistema a ser identificado.

## 4 Identificação de um Levitador Magnético

Para validação deste método, foi selecionado um sistema de levitação magnética, composto por 2 ímãs permanente e um disco magnético móvel. Para atuar sobre o disco móvel o sistema conta com quatro bobinas magnéticas, sendo utilizadas apenas duas delas. Assim, apenas o movimento do disco no eixo *x* é considerado, sendo o movimento nos eixos *y* e *z* desprezíveis [5].

A implementação deste sistema pode ser observada na Figura 2a, e em uma forma esquemática em 2b. Uma descrição mais detalhada sobre este sistema pode ser encontrada em [5]. É importante mencionar que tal sistema é instável, segundo o teorema de Earnshaw (1842). Assim, para contornar o problema da instabilidade, o sistema opera em malha fechada, sob ação de um controlador PI. Para excitar a dinâmica deste sistema, foi utilizado o sinal de entrada expresso pela Figura 3-a, sendo obtido o sinal 3-b, para a identificação do mesmo. Para a identificação foram utilizados sinais de entrada e saída compostas por 100000 amostras, sendo o período de amostragem de 1ms. Para a etapa de validação foram utilizados vetores com 20000 amostras.

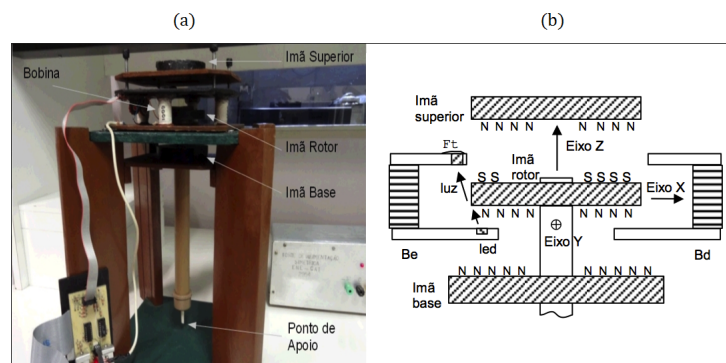


Figura 2: a) Implementação do sistema. b) Esquemático do levitador magnético, [5].

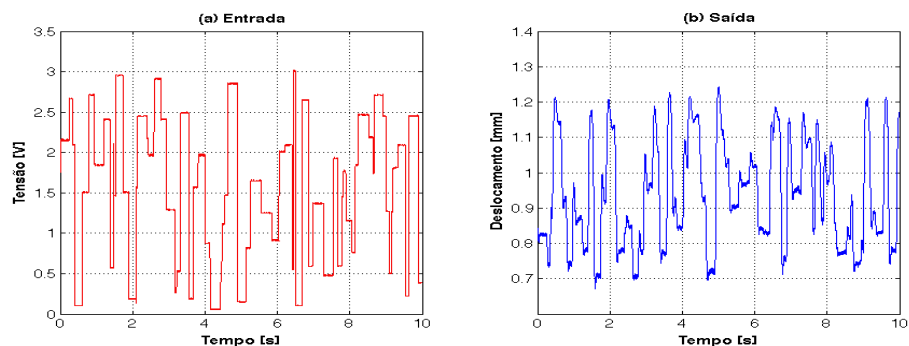


Figura 3: Sinais de entrada e saída utilizados na identificação do levitador magnético.

## 5 Resultados

No AG utilizado na busca pelos parâmetros do modelo NARX-OBF, foram utilizadas populações de 200 cromossomos, sendo o torneio o método de seleção empregado. As taxas de *Crossover* e mutação, variaram de 80 a 20% e de 5 a 20%, respectivamente.

O erro médio quadrático, *EMQ*, obtido na identificação, em malha fechada, do levitador magnético para modelos NARX-OBF, com diferentes números de funções ortonormais,

pode ser observado nas Tabelas 1 e 2.

Tabela 1: EMQ para modelos NARX-OBF completos.

NF	NC	Polo	EMQ
2	14	$0,6479 \pm 0,3812i$	$1,9416 \times 10^{-3}$
4	44	$0,5521 \pm 0,4012i$	$9,7212 \times 10^{-4}$

em que  $NF$  representa o número de funções ortonormais utilizadas, e  $NC$  corresponde ao número de coeficientes que compõem cada modelo NARX-OBF.

Tabela 2: EMQ para modelos NARX-OBF simplificados.

NF	NC	Polo	EMQ	fitness
2	4	$0,6430 \pm 0.0394i$	$3,4063 \times 10^{-3}$	85,3301
4	28	$0,6322 \pm 0,4758i$	$2,1886 \times 10^{-3}$	164,2008

Na Tabela 2, pode-se ainda observar o *fitness*, expresso pela Equação (10), utilizado como função de avaliação na redução do número de termos dos modelos NARX-OBF.

Os exemplos expostos na Tabela 2 tem suas respostas ao sinal mostrado na Figura 3a, expressos na Figura 4. A resposta do modelo NARX-OBF simplificado, com 2 funções e 4 termos, pode ser observado na Figura 4a. Enquanto a resposta do modelo com 4 funções e 28 termos pode ser observado na Figura 4b.

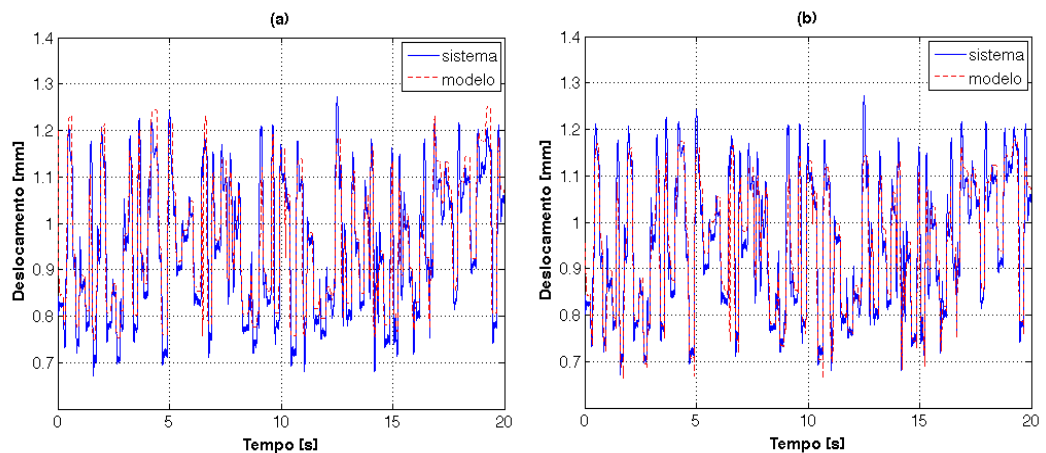


Figura 4: Resultado da identificação de um levitador magnético a partir de um modelo NARX-OBF simplificado, a) para 2 funções de Kautz com 4 termos e b) para 4 funções de Kautz com 28 termos.

## 6 Conclusão

Neste artigo foi proposto um método de redução de ordem de um modelo NARX-OBF a partir de Algoritmo Genético, intercalado com o método de Levenberg Marquardt. A

validação desta metodologia se deu a partir da identificação, em malha fechada, de um Levitador Magnético, do qual foram amostrados dados reais de entrada e saída.

A partir das Tabelas 1 e 2 pode-se concluir que é possível reduzir o número de termos de um modelo NARX-OBF, sem afetar significativamente o EMQ na identificação do sistema proposto. Pode-se inferir também que grande parte dos termos que compõem os modelos NARX-OBF completos não é relevante para a modelar o sistemas em questão, uma vez que sua supressão não alterou significativamente o desempenho do modelo simplificado.

Futuramente espera-se fazer uso de Programação Genética para seleção dos termos candidatos para compor o modelo NARX-OBF simplificado e a utilização de GOBFs ao invés das funções de Kautz.

## Referências

- [1] L. A. Aguirre, G. G. Rodrigues e C. R. F. Jácome, Identificação de sistemas não-lineares utilizando modelos NARMAX polinomiais - Uma revisão e novos resultados. SBA Controle e Automação, vol. 9, pp. 90-106, (1998).
- [2] L. A. Aguirre, Introdução a Identificação de Sistemas - Técnicas Lineares e não lineares Aplicadas a Sistemas Reais, Editora UFMG, 3<sup>a</sup> edição, (2007).
- [3] H. Akaike, A new look at the Statistical Model Identification. IEEE transactions on Automatic Control, vol. 19, issue 6, pp. 716-723, (1974).
- [4] H. W. Belt, Orthonormal Bases for Adaptive Filtering. PHD Thesis, Technische Universiteit Eindhoven, (1997).
- [5] M. A. E. Coelho, A. Bauchspiess, Identificação em Kit Didático Para Levitação Magnética. SBAl-Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, Outubro de 2013, Fortaleza - CE, (2013).
- [6] P. S. C. Heuberger, P. M. J. Van Den Hof, and B. Wahlberg, Modelling and Identification with Rational Orthogonal Basis Functions. Springer Press, 1<sup>st</sup> edition, (2005).
- [7] D. T. Lemma and M. Ramasamy and M. Shuhaimi, Closed-loop identification of systems with uncertain time delays using ARX-OBF structure. Journal of Process Control, vol. 21, Issue 8, pp. 1148-1154, September, (2011).
- [8] E. Oroski, J. R. Deroco e A. Bauchspiess, Identificação de um Levitador Magnético Não Linear a Partir de Funções de Kautz e Algoritmos Genéticos. Congresso Nacional de Matemática Aplicada à Indústria, novembro de 2014, Caldas Novas - GO, (2014).
- [9] A. da Rosa, and R. J. G. Campello, W. C. Amaral, Exact Search Directions for Optimizations of Linear and Nonlinear Models Based on Generalized Orthonormal Functions, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 54, N<sup>o</sup> 12, pp. 2757-2772, (2009).