

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Projeto de Controlador Robusto via Programação Linear

Leiliane Borges Cunha¹

Universidade Federal do Pará-UFPA, Programa de Pós-Graduação de Engenharia Elétrica-PPGEE-UFPA. Rua Augusto Corrêa, 01, Guamá 66075-110, Belém – Pará.

Anderson de França Silva²

Universidade Federal do Pará-UFPA, Programa de Pós-Graduação de Engenharia Elétrica-PPGEE-UFPA. Rua Augusto Corrêa, 01, Guamá 66075-110, Belém – Pará.

José Augusto Lima Barreiros³

Universidade Federal do Pará-UFPA, Programa de Pós-Graduação de Engenharia Elétrica-PPGEE-UFPA. Rua Augusto Corrêa, 01, Guamá 66075-110, Belém – Pará.

Antônio da Silva Silveira⁴

Universidade Federal do Pará-UFPA, Programa de Pós-Graduação de Engenharia Elétrica-PPGEE-UFPA. Rua Augusto Corrêa, 01, Guamá 66075-110, Belém – Pará.

Walter Barra Junior⁵

Universidade Federal do Pará-UFPA, Programa de Pós-Graduação de Engenharia Elétrica-PPGEE-UFPA. Rua Augusto Corrêa, 01, Guamá 66075-110, Belém – Pará.

Resumo. Este trabalho apresenta o projeto de um controlador robusto via programação linear em comparação com uma técnica de projeto convencional via posicionamento de polos. Os controladores foram aplicados à regulação de um sistema linear invariante no tempo. Testes foram realizados a fim de verificar o desempenho dos controladores projetados.

Palavras-chave. Programação linear, motor CC, estabilidade, desempenho, robustez.

1 Introdução

¹ leilianebc@hotmail.com,

² silva.anso@gmail.com

³ barreiro@ufpa.br

⁴ asilveira@ufpa.br

⁵ walbarra@ufpa.br

Muitos projetos de controladores são realizados a partir de modelos obtidos linearizando-se um sistema em torno de um ponto de operação fixo. Sendo assim, diante de uma eventual variação de seus parâmetros nominais, o sistema pode apresentar uma dinâmica diferente da qual foi levada em consideração no momento do projeto do controlador e isto pode ocasionar a instabilidade do sistema. Neste âmbito, surge a necessidade de projetar controladores robustos que sejam capazes de manter a estabilidade dos sistemas diante das variações em seus parâmetros e manter a robustez dentro de uma faixa aceitável [1].

O problema de projetar controladores robustos para plantas com incertezas paramétricas vem sendo extensivamente estudado ao longo dos últimos anos focando principalmente a estabilidade e desempenho robustos [1]. Em [3], é proposta uma metodologia de projeto na qual leva-se em consideração as incertezas paramétricas do sistema representadas por intervalos reais. Os controladores são projetados via programação linear através de uma análise politópica das incertezas. Em [5], é apresentado um sistema linear invariante no tempo, sujeito às variações em seus parâmetros nominais representados por intervalos reais fechados.

Portanto, neste trabalho é apresentado o projeto de um controlador utilizando-se a metodologia proposta em [3] aplicada ao sistema descrito em [5]. Testes foram realizados a fim de validar a estratégia de controle proposta para regulação do sistema em estudo.

2 Propósito

Este trabalho destina-se a mostrar o desempenho robusto de um motor CC, sujeito a variações paramétricas, através do projeto de um controlador robusto usando técnicas de programação linear. Tais técnicas consideram as incertezas o sistema. Com a utilização desta técnica avançada de controle, espera-se reduzir o esforço de controle quando o sistema estiver operando fora de seu ponto de operação nominal.

3 Métodos

3.1 Verificação da estabilidade robusta de um sistema com parâmetros incertos.

Considere uma planta em malha aberta, que descreve a dinâmica de um sistema linear e invariante no tempo, cujos parâmetros são incertos, definida pela equação (1).

$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{n_n s^n + n_{n-1} s^{n-1} + \dots + n_0}{d_n s^n + d_{n-1} s^{n-1} + \dots + d_0} \quad (1)$$

Onde $n_l = [n_l^-, n_l^+]$ e $d_l = [d_l^-, d_l^+] \in R^n$, $l = 0, 1, \dots, n$ são os coeficientes de valores incertos da planta, delimitados por um intervalo reais fechados.

Em relação à estabilidade robusta, um sistema é considerado robustamente estável quando, diante de pequenas variações em torno do seu valor nominal, o sistema consegue manter a estabilidade, respeitando os limites mínimos e máximos de variações em seus parâmetros [3].

3.2 Projeto do controlador robusto via técnica de programação linear.

Considerando a equação (1), de ordem n e um controlador $C(s)$, de ordem r , mostrado na equação (2).

$$C(s) = \frac{n_c(s)}{d_c(s)} = \frac{a_r s^n + a_{r-1} s^{n-1} + \dots + a_0}{b_r s^n + b_{r-1} s^{n-1} + \dots + b_0} \quad (2)$$

O polinômio característico em malha fechada é descrito pela equação (3),

$$G_{MF}(s) = (n_n a_r + d_n b_r) s^{n+r} + (n_n a_{r-1} + n_{n-1} a_r + d_n b_{r-1} + d_{n-1} b_r) s^{n+r-1} + \dots + (n_0 a_0 + d_0 b_0) \quad (3)$$

Sua resposta transitória deve seguir um padrão de desempenho transitório especificado no intervalo $\delta_i^- \leq \delta_i \leq \delta_i^+$, para todo i , conforme equação (4).

$$\delta(s) = \delta_{n+r} s^{n+r} + \delta_{n+r-1} s^{n+r-1} + \dots + \delta_0 \quad (4)$$

Assim, para um sistema apresentar estabilidade e desempenho robustos, a equação (3) deve apresentar o mesmo desempenho do polinômio da equação (4), como mostra o sistema de equação (5).

$$\begin{aligned} \delta_{n+r} &= n_n a_r + d_n b_r \\ \delta_{n+r-1} &= n_n a_{r-1} + n_{n-1} a_r + d_n b_{r-1} + d_{n-1} b_r \\ &\vdots \\ \delta_0 &= n_0 a_0 + d_0 b_0 \end{aligned} \quad (5)$$

Logo, segundo [3], para o projeto do controlador robusto, formula-se um conjunto de inequações lineares, mostrado na equação (6), que restringe os coeficientes do controlador nos intervalos definidos. Com isso, o sistema em malha fechada possui seus polos dentro do espaço de raízes do polinômio intervalar desejado [4].

$$\begin{bmatrix} \delta_{n+r}^- \\ \delta_{n+r-1}^- \\ \vdots \\ \delta_0^- \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} n_n a_r + d_n b_r \\ n_n a_{r-1} + n_{n-1} a_r + d_n b_{r-1} + d_{n-1} b_r \\ \vdots \\ n_0 a_0 + d_0 b_0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \delta_{n+r}^+ \\ \delta_{n+r-1}^+ \\ \vdots \\ \delta_0^+ \end{bmatrix} \quad (6)$$

A partir da equação (6), usa-se a técnica de programação linear definida em [3], conforme a equação (7).

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &\text{Sujeito à} \\ Ax \leq b, A &= \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_{\max} \\ -b_{\min} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

Onde $f(x)$ é uma função linear arbitraria em x , x é o vetor com as variáveis do controlador a serem otimizadas, b_{\min} e b_{\max} , correspondem as inequações correspondentes aos limites inferiores e superiores do sistema em malha fechada, respectivamente. A matriz A corresponde aos coeficientes do sistema a ser otimizado.

3.3 Controle de posição de um motor CC usando um controlador Proporcional Derivativo (PD) Robusto.

Com base na técnica descrita nos itens anteriores, projeta-se um controlador PD para o motor CC, cuja entrada é a tensão na armadura V_a , em volts, e a saída, a posição angular (θ), em radianos. Ressalta-se que a escolha do controlador PD ocorre porque a planta já apresenta um integrador natural. Assim, considere a matriz de estado intervalar (8) e o vetor de entrada intervalar (9) que representa o motor CC [5]. A Tabela 1 mostra os dados usados na simulação.

$$\dot{x} = [A]x(t) + [B]u \tag{8}$$

Onde:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{-B_{eq}}{[I_{\min}, I_{\max}]} \end{bmatrix} \text{ e } [B] = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{A_m}{[I_{\min}, I_{\max}]} \end{bmatrix} \tag{9}$$

Tabela 1: Parâmetros do Motor DC

$I=[I_{\min}, I_{\max}]$	$[7.764, 8.327] \times 10^{-3} \text{ Kg. m}^2$
B_{eq}	0.08404 N m s/rad
A_m	0.1285 N m/ V

Na Tabela 1, I representa o momento de inércia intervalar do motor CC, A_m é o ganho do atuador, B_{eq} o coeficiente de atrito viscoso. Aplicando a transformada de Laplace, tem-se a função de transferência correspondente, dada pela equação (10).

$$\frac{\theta}{V_a} = \frac{\beta_0}{s(s + \alpha_1)} \tag{10}$$

Sendo: $\beta_0 = \frac{A_m}{[I_{\min}, I_{\max}]}$ e $\alpha_1 = \frac{B_{eq}}{[I_{\min}, I_{\max}]}$.

Assim,

$$G_{MF}(s) = \frac{[15.43, 16.55]}{s^2 + [10.09, 10.82]s} \tag{11}$$

Agora, admite-se o controlador PD, descrito pela equação (12).

$$C(s) = K_d s + K_p \tag{12}$$

De acordo com a equação (3), o polinômio característico da planta em malha fechada, com seus polos associados, toma a forma mostrada na equação (13).

$$G_{MF}(s) = s^2 + (\alpha_1 + \beta_0 K_d) s + \beta_0 K_p \tag{13}$$

Assim, para uma resposta transitória desejada, considerou-se um tempo de pico T_p , um sobressinal M_p , um fator de amortecimento ζ e a frequência natural de oscilação ω_n do sistema, conforme Tabela 2, cujos polos (autovalores) desejados associados com as especificações são mostrados na Tabela 3.

Tabela 2: Especificações de desempenho para o motor CC

T_p (s)	M_p (%)	ζ	ω_n (rad/s)
0.40	[3, 6]	[0.6671, 0.7448]	[10.5430, 11.7701]

Tabela 3: Autovalores desejados para o Motor CC

λ_{\min}	$-8.7664 \pm 7.8540i$
λ_{\max}	$-7.0335 \pm 7.8540i$

Resultando em um polinômio característico desejado intervalar mostrado na equação (14).

$$\delta(s) = s^2 + [8.41, 10.81]s + [79.37, 90.92] \tag{14}$$

Agora, considerando-se a equação (5) e o sistema de inequações (6) com seus parâmetros intervalares, tem-se:

$$b_{\min} = \begin{bmatrix} -1.6824 \\ -2.4143 \\ -1.6824 \\ -2.4143 \\ 79.37 \\ 79.37 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 15.43 & 0 \\ 15.43 & 0 \\ 16.55 & 0 \\ 16.55 & 0 \\ 0 & 15.43 \\ 0 & 16.55 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} K_d \\ K_p \end{bmatrix} \text{ e } b_{\max} = \begin{bmatrix} 0.7216 \\ -0.0102 \\ 0.7216 \\ -0.0102 \\ 90.92 \\ 90.92 \end{bmatrix}$$

Usando a técnica de programação linear na condição da equação (7), obtemos o controlador robusto ótimo, mostrado na equação (15).

$$G_c(s) = 0.2576 s + 7.203 \tag{15}$$

4 Resultados

Com o objetivo de analisar o desempenho dos controladores projetados, foi realizado um teste aplicando-se um sinal do tipo degrau na entrada do sistema. Neste teste, os controladores foram submetidos à três pontos de operação diferentes, isto é, a três valores para o momento de inércia. Conforme ilustrado na Figura 1, nota-se o bom desempenho de ambos os controladores. Para toda a faixa de pontos de operação, tanto o controlador robusto sintonizado via programação linear quanto o controlador obtido via técnica clássica foram capazes de manter as especificações de desempenho. Com o

tempo de pico em torno de 0,35 segundos e máximo sobressinal em torno de 6%.

Destaca-se que o esforço de controle aplicado pelo controlador robusto, no transitório, foi ligeiramente menor do que o controlador convencional, principalmente quando foi modificado o ponto de operação.

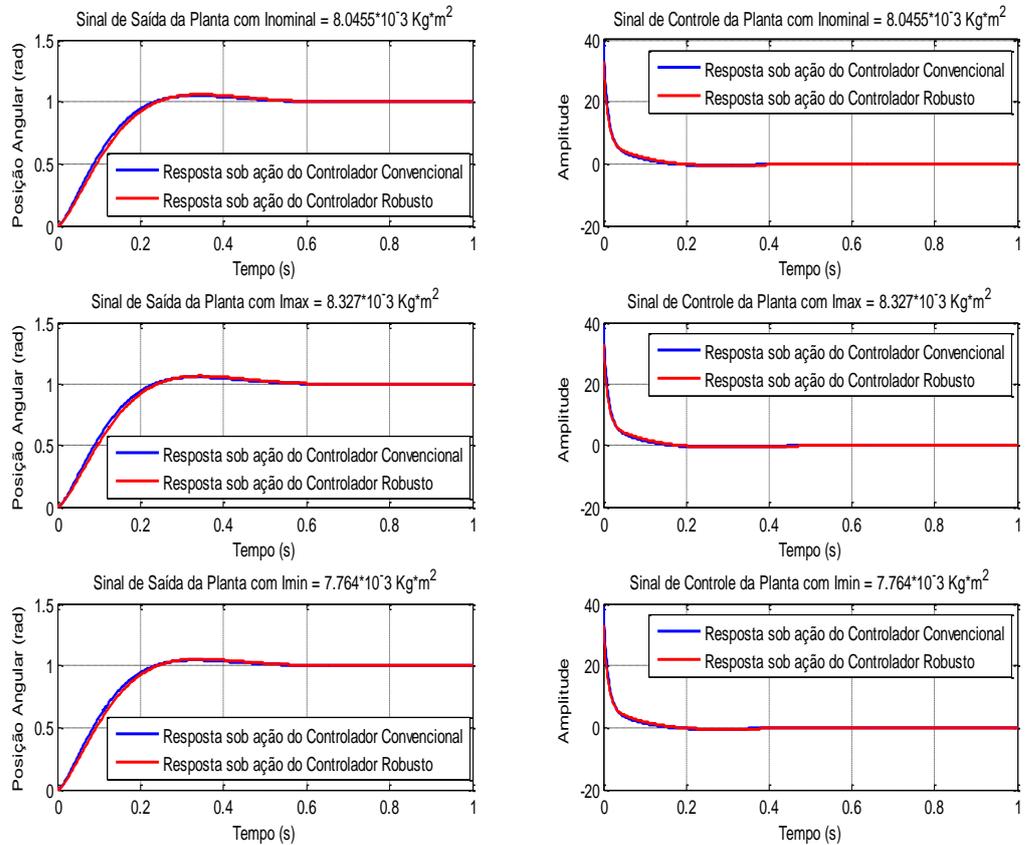


Figura 1: Sinal de Saída e do Esforço de Controle.

5 Conclusão

Os resultados apresentados permitem concluir, através da aplicabilidade da técnica de sintonização proposta neste artigo para o sistema em estudo, que o controlador robusto garantiu a robustez em desempenho e em estabilidade diante da variação paramétrica do sistema. Vale ressaltar a robustez da técnica clássica, a qual também apresentou um bom desempenho.

A aplicabilidade do método proposto para outros sistemas físicos ainda carece de maior investigação que inclua a comparação entre metodologias clássicas e avançadas com o objetivo de aproveitar melhor cada uma das técnicas, quando analisados os desempenhos dinâmicos diante das variações paramétricas dos sistemas físicos.

Agradecimentos

Os autores agradecem à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-CAPES pelo apoio financeiro dado a esta pesquisa e à Universidade Federal do

Pará-UFPA por disponibilizar recursos humanos e materiais que propiciaram a realização deste trabalho.

Referências

- [1] S. P. Bhattacharyya, H. Chapellat and L. H. Keel, Robust Control: The Parametric Approach, vol.1, (1995).
- [2] C. A. Costa, Projeto e Avaliação de uma estratégia baseada em análise intervalar aplicada ao projeto de estabilizador de sistema de potencia robusto implementado e um sistema de geração de 10KVA, Dissertação de Mestrado, UFPA, (2013).
- [3] L. H. Keel and S. P. Bhattacharyya, A linear programming Approach To Controller Design, IEEE Transactions on Automatic Control, California USA, (1997).
- [4] A. D. S. Lordelo and P. A. V. Ferreira, Interval analysis and design of robust pole assignment controllers, In Proceedings of the 41th IEEE conference on decision and control, Las Vegas, (2002).
- [5] A. D. S. Lordelo and H. A. Fazzolari, On interval goal programming switching surface robust design for Integral Sliding Mode Control, Control Engineering Practice, Cap.32, vol. 32,(2014).