

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

---

## Fronteira e Região de Estabilidade Fraca de um Ponto de Equilíbrio Hopf Supercrítico do tipo zero

Josaphat R. R. Gouveia Jr.<sup>1</sup>

Departamento de Ensino, Instituto Federal da Bahia, Campus Eunápolis, Eunápolis, BA, Brasil.

Luís Fernando C. Alberto<sup>2</sup>

Departamento de Engenharia Elétrica, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.

**Resumo.** Uma caracterização completa da fronteira da região de estabilidade fraca de um ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo zero de uma classe de sistemas dinâmicos autônomos não lineares é desenvolvida admitindo a existência de elementos críticos hiperbólicos na fronteira da região de estabilidade fraca. Sob a condição de transversalidade, mostra-se que a fronteira da região de estabilidade fraca é composta pelas variedades estáveis de todos os elementos críticos hiperbólicos presentes na fronteira da região de estabilidade fraca.

**Palavras-chave.** Sistemas Dinâmicos, Sistemas Não Lineares, Região de Estabilidade Fraca, Fronteira da Região de Estabilidade Fraca, Ponto de Equilíbrio Hopf Supercrítico.

### 1 Introdução

Na maioria das aplicações, embora desejável, dificilmente encontramos pontos de equilíbrio globalmente estáveis. Para pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis, existe um subconjunto de condições iniciais, chamado de região de estabilidade, cujas trajetórias, iniciando dentro deste conjunto, tendem para o ponto de equilíbrio assintoticamente estável quando o tempo tende ao infinito. Conhecer a região de estabilidade do equilíbrio nos permite uma melhor compreensão de como o sistema se comporta sujeito a pequenas perturbações.

O problema de determinar a região de estabilidade de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para um sistema dinâmico autônomo não linear é relevante em diversas aplicações no campo da engenharia, incluindo problemas de estabilidade em sistemas elétricos de potência [3, 5, 12, 15], técnicas de otimização global via sistemas dinâmicos [9] e em outras áreas tais como ecologia [10] e economia [2]. Entretanto, determinar ou estimar a região de estabilidade de um sistema dinâmico é um problema difícil e métodos sistemáticos para este fim só existem para classes específicas de sistemas.

---

<sup>1</sup>josaphat@ifba.edu.br

<sup>2</sup>lfcaberto@usp.br

Expressar analiticamente a região de estabilidade pode ser difícil ou até mesmo impossível. Diante disso, nos anos 80, houve um enorme avanço na teoria da região de estabilidade com resultados acerca da caracterização global das regiões de estabilidade de sistemas dinâmicos autônomos não lineares [4]. Motivado pelo problema de análise de estabilidade transitória em sistemas elétricos de potências, Chiang em [4] apresentou uma caracterização completa da fronteira da região de estabilidade em termos das variedades estáveis dos pontos de equilíbrios instáveis e dos ciclos limites instáveis presentes na fronteira.

Sistemas dinâmicos autônomos de tempo contínuos são frequentemente modelados matematicamente por equações diferenciais dependentes de um ou mais parâmetros. Com uma variação pequena de um dos seus parâmetros, mudanças bruscas no comportamento das soluções do sistema podem surgir. A Teoria de Bifurcação nos fornece ferramentas necessárias para compreender como o sistema dinâmico se comporta com a variação destes parâmetros. Numa bifurcação de Hopf supercrítica, o ponto de equilíbrio hiperbólico estável perde estabilidade, ocasionando o surgimento de uma órbita periódica estável cuja amplitude cresce à medida que o parâmetro se afasta do valor crítico de bifurcação.

O objetivo deste artigo é entender o comportamento da região de estabilidade fraca do ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo zero e de sua fronteira. O adjetivo fraca é utilizado porque o ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo-0 é um ponto de equilíbrio atrativo mas que perde esta propriedade com a variação dos parâmetros. Estudaremos a caracterização da fronteira da região de estabilidade fraca na presença de elementos críticos (pontos de equilíbrios ou órbitas periódicas) hiperbólicos na fronteira. Condições necessárias e suficientes para elementos críticos pertencerem à fronteira da região de estabilidade fraca serão apresentadas.

## 2 Preliminares

Nesta seção, recordaremos alguns conceitos clássicos relacionados com a teoria de sistemas dinâmicos que são essenciais para o desenvolvimento posterior deste trabalho. Mais detalhes sobre os conteúdos explorados nesta seção podem ser encontradas em [8, 13].

Consideremos o sistema dinâmico autônomo não linear

$$\dot{x} = f(x) \tag{1}$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um campo vetorial suave. A solução de (1) iniciando em  $x$  no tempo  $t = 0$  é denotado por  $\varphi(t, x)$ . Um conjunto  $S \subset \mathbb{R}^n$  é dito ser um conjunto invariante de (1) se cada trajetória de (1) começando em  $S$  permanece em  $S$  para todo  $t$ .

O ponto  $x^* \in \mathbb{R}^n$  é um ponto de equilíbrio de (1) se  $f(x^*) = 0$ . Um ponto de equilíbrio  $x^*$  de (1) é dito ser *hiperbólico* se todos os autovalores da matriz Jacobiana  $D_x f(x^*)$  não tem parte real nula.

Além disso, um ponto de equilíbrio hiperbólico  $x^*$  é do *tipo- $k$*  se a matriz Jacobiana possui  $k$  autovalores com parte real positiva e  $n - k$  autovalores com parte real negativa.

Seja  $x^*$  um ponto de equilíbrio não-hiperbólico do sistema dinâmico autônomo não linear (1). Existem variedades invariantes suaves locais  $W^s(x^*)$ ,  $W^{cs}(x^*)$ ,  $W^c(x^*)$ ,  $W^u(x^*)$

e  $W^{cu}(x^*)$  em  $x^*$ , veja [6, 11]. Estas variedades são chamadas de variedades estável, centro estável, central, instável e centro instável, respectivamente. As variedades estável e instável são únicas, mas as variedades centro estável, central e centro instável podem não ser.

Transversalidade é um conceito geométrico que trata das interseções das variedades e têm desempenhado um papel muito importante no desenvolvimento da teoria de sistemas dinâmicos. Sejam  $\Psi_i$  e  $\Psi_j$  variedades de dimensões  $n$  e  $l$ . Dizemos que as variedades  $W^u(\Psi_i)$  e  $W^s(\Psi_j)$  em  $\mathbb{R}^n$  de classe  $C^r$  ( $r \geq 1$ ) são transversais, se  $W^u(\Psi_i) \cap W^s(\Psi_j) = \emptyset$ ; ou se  $x \in W^u(\Psi_i) \cap W^s(\Psi_j) \neq \emptyset$ , então  $\dim(W^u(\Psi_i) \cap W^s(\Psi_j)) \geq 1 + \max\{n, l\}$  e  $T_x(W^u(\Psi_i)) + T_x(W^s(\Psi_j)) = \mathbb{R}^n$ , onde  $T_x(W^u(\Psi_i))$  e  $T_x(W^s(\Psi_j))$  denotam o espaço tangente de  $W^u(\Psi_i)$  e  $W^s(\Psi_j)$ , respectivamente, no ponto  $x$ .

### 3 Região de Estabilidade Fraca de um Ponto de Equilíbrio Hopf Supercrítico do Tipo-Zero

Nesta seção, definiremos região de estabilidade fraca de um ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo-0 e estudaremos algumas de suas propriedades topológicas.

Considere o sistema dinâmico não linear (1) e seja  $p$  um ponto de equilíbrio não hiperbólico. Um ponto de equilíbrio não hiperbólico  $p \in \mathbb{R}^n$  de (1) é chamado um ponto de equilíbrio de Hopf se as seguintes condições forem satisfeitas:

- (i)  $D_x f(p)$  tem um par simples de autovalores imaginários puros,  $\pm i\omega$ , e nenhum outro autovalor com parte real nula;
- (ii)  $l_1 \neq 0$ , onde  $l_1$  é o Primeiro Coeficiente de Lyapunov, ver [7, 8].

Um ponto de equilíbrio de Hopf  $p \in \mathbb{R}^n$  de (1) é chamado um ponto de equilíbrio Hopf supercrítico se o primeiro coeficiente de Lyapunov  $l_1 < 0$  e é chamado um ponto de equilíbrio de Hopf subcrítico se o primeiro coeficiente de Lyapunov  $l_1 > 0$ .

Pontos de equilíbrio de Hopf podem também ser classificados em tipos de acordo com o número de autovalores de  $D_x f(p)$  com parte real positiva. Um ponto de equilíbrio de Hopf  $p$  de (1) é chamado um ponto de equilíbrio de Hopf do tipo- $k$  se  $D_x f(p)$  tem  $k$  ( $k \leq n - 2$ ) autovalores com parte real positiva e  $n - k - 2$  com parte real negativa.

Neste artigo, estamos principalmente interessados nos pontos de equilíbrio de Hopf supercríticos do tipo-zero. Se  $p$  é um ponto de equilíbrio de Hopf supercrítico do tipo-0 de (1), para maiores detalhes ver [8, 14], então, a variedade estável  $(n - 2)$ -dimensional  $W^s(p)$  de  $p$  existe, é única, e se  $q \in W^s(p)$  então  $\varphi(t, q) \rightarrow p$  quando  $t \rightarrow +\infty$ ; e a variedade central bidimensional  $W^c(p)$  de  $p$  existe, não é única, e se  $q \in W^c(p)$  então  $\varphi(t, q) \rightarrow p$  quando  $t \rightarrow +\infty$ .

A Figura 1 ilustra as variedades invariantes do ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo-zero em  $\mathbb{R}^3$ .

A região de estabilidade fraca de  $p$  é o conjunto  $A(p)$  dos pontos  $q \in \mathbb{R}^n$  cujas trajetórias convergem para  $p$  quando  $t \rightarrow +\infty$ , isto é,  $A(p) = \{q \in \mathbb{R}^n : \varphi(t, q) \rightarrow p \text{ quando } t \rightarrow +\infty\}$ . O próximo resultado estabelece que a região de estabilidade fraca  $A(p)$  é um conjunto aberto invariante.

**Teorema 3.1.** [1, 4] *Seja  $p$  um ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo-zero do sistema (1). Então a região de estabilidade fraca  $A(p)$  é um conjunto aberto em  $\mathbb{R}^n$ . Além*

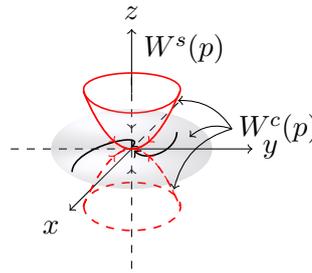


Figura 1: Variedades  $W^c(p)$  e  $W^s(p)$  do ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo-zero  $p$  do sistema 1 em  $\mathbb{R}^3$ .  $W^c(p)$  não é única. Três possíveis escolhas de  $W^c(p)$  são mostradas nesta figura.

disso, a região de estabilidade fraca  $A(p)$ , o seu fecho  $\overline{A(p)}$  e a sua fronteira  $\partial A(p)$  são conjuntos invariantes.

#### 4 Caracterização da Fronteira da Região de Estabilidade Fraca

Nesta seção, resultados inéditos de caracterização de equilíbrios na fronteira da região de estabilidade fraca são apresentados. Para a caracterização da fronteira da região de estabilidade de um ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo-zero, procederemos com uma caracterização local da fronteira da região de estabilidade por meio do estudo e caracterização dos elementos críticos hiperbólicos que pertencem à fronteira da região de estabilidade, e depois exibiremos uma caracterização global.

**Teorema 4.1. (Ponto de equilíbrio hiperbólico na fronteira da região de estabilidade fraca)** *Sejam  $p$  um ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo-zero do sistema (1) e  $A(p)$  sua região de estabilidade fraca. Se  $\psi$  é um elemento crítico hiperbólico do sistema (1), então*

- (i)  $\psi \in \partial A(p) \iff (W_{loc}^u(\psi) \setminus \{\psi\}) \cap \overline{A(p)} \neq \emptyset$
- (ii)  $\psi \in \partial A(p) \iff W_{loc}^s(\psi) \cap \partial A(p) \neq \emptyset$

A prova completa do Teorema 4.1 é longa e será omitida. Em seguida, discutiremos as principais ideias desta prova. A prova de que a interseção não vazia da variedade instável do elemento crítico hiperbólico com o fecho da região de estabilidade fraca do ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo-zero é uma condição necessária para garantir que o elemento crítico hiperbólico pertença à fronteira da região de estabilidade fraca, resulta como uma consequência do  $\lambda$ -lemma para pontos de equilíbrio não hiperbólicos, veja [16]. Explorando esse lema, encontramos uma sequência de pontos na região de estabilidade fraca convergindo para um ponto na variedade instável do elemento crítico hiperbólico. A prova de que  $W_{loc}^s(\psi) \cap \partial A(p) \neq \emptyset$  se  $\psi \in \partial A(p)$  é muito similar à demonstração da primeira parte.

Desenvolveremos uma caracterização da fronteira da região de estabilidade fraca de um ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo-0. Para isto, admitiremos algumas condições

sobre o campo vetorial. Sejam  $p$  um ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo-0 do sistema (1) e considere as seguintes suposições:

- (S1) Todos os elementos críticos em  $\partial A(p)$  são hiperbólicos;
- (S2) A variedade estável e a variedade instável dos elementos críticos em  $\partial A(p)$  satisfazem a condição de transversalidade;
- (S3) Toda trajetória em  $\partial A(p)$  se aproxima de um elemento crítico quando  $t \rightarrow +\infty$ .

O próximo resultado estabelece condições necessárias e suficientes para garantir que os elementos críticos hiperbólicos pertençam à fronteira da região de estabilidade. Inicialmente, desenvolveremos uma caracterização de pontos de equilíbrio do tipo-1 na fronteira da região de estabilidade fraca e depois a caracterização para pontos de equilíbrios de tipos superiores a 1 seguirá por argumentos de indução.

**Teorema 4.2. (Elementos críticos hiperbólicos tipo- $k$  na fronteira da região de estabilidade fraca)** *Sejam  $A(p)$  a região de estabilidade fraca de um ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo-zero  $p$  e  $\psi$  um elemento crítico hiperbólico do tipo- $k$ , com  $1 \leq k \leq n$ , do sistema (1). Se as suposições (S1), (S2) e (S3) são satisfeitas, então:*

- (i)  $\psi \in \partial A(p) \iff W^u(\psi) \cap A(p) \neq \emptyset$
- (ii)  $\psi \in \partial A(p) \iff W^s(\psi) \subset \partial A(p)$

O próximo teorema fornece uma completa caracterização da fronteira da região de estabilidade fraca quando elementos críticos hiperbólico pertencem à  $\partial A(p)$ .

**Teorema 4.3. (Caracterização da Fronteira da Região de Estabilidade Fraca para Elementos críticos)** *Sejam  $p$  um ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo-zero de (1) e  $A(p)$  sua região de estabilidade fraca. Se as suposições (S1) e (S3) são satisfeitas, então  $\partial A(p) \subset \bigcup_i W^s(\psi_i)$  onde  $\psi_i, i = 1, 2, \dots$  são os elementos críticos hiperbólicos em  $\partial A(x^s)$ . Se a suposição (S2) é satisfeita, então  $\partial A(p) = \bigcup_i W^s(\psi_i)$ .*

## 5 Exemplo

Considere o sistema Predador-Presa em  $\mathbb{R}^2$  extraído de [16], com  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - \frac{xy}{1 + 0.5x} - \frac{x^2}{6} \\ \dot{y} &= -y \left( 1 - \frac{x}{1 + 0.5x} \right) \end{aligned}$$

O sistema (2) possui três pontos de equilíbrio, são eles: dois pontos de equilíbrio hiperbólicos do tipo-1,  $x_1 = (0, 0)$  e  $x_2 = (6, 0)$ , e um ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo-zero,  $p = (2, \frac{4}{3})$ . Como os pontos  $x_1 = (0, 0)$  e  $x_2 = (6, 0)$  são hiperbólicos então o sistema satisfaz a condição (S1), ver Figura 2. A suposição (S3) é satisfeita, mas a suposição (S2) não o é, pois a variedade instável  $W^u(x_1)$  do ponto de equilíbrio  $x_1$  não intersecta transversalmente a variedade estável  $W^s(x_2)$  do ponto de equilíbrio  $x_2$ . A variedade estável  $W^s(x_1)$  intercepta a fronteira da região de estabilidade fraca  $\partial A(p)$ , de acordo com o Teorema 4.2. A variedade instável do ponto de equilíbrio hiperbólico do

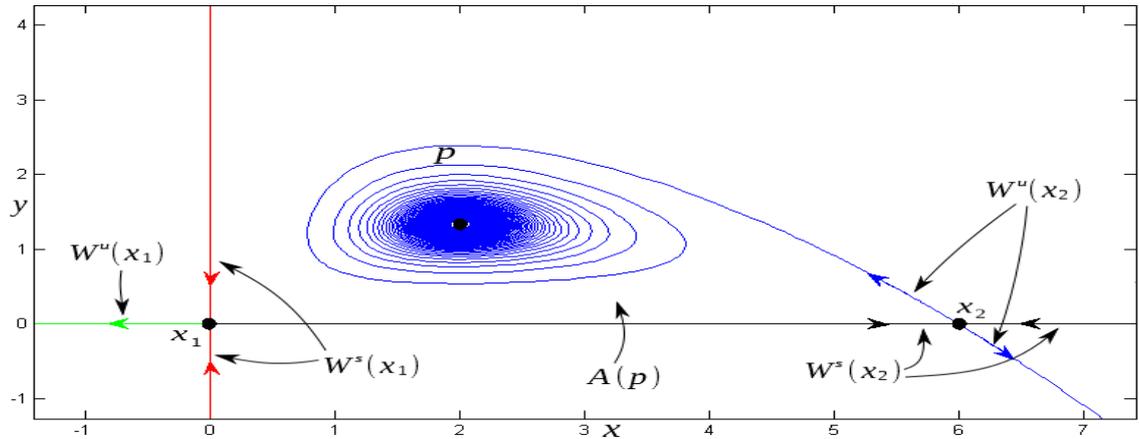


Figura 2: Retrato de fase do sistema (2). A fronteira da região de estabilidade fraca  $\partial A(p)$  está contida na união da variedade estável  $W^s(x_1)$  do ponto de equilíbrio hiperbólico do tipo-1  $x_1 = (0, 0)$ , curva vermelha, com a variedade estável  $W^s(x_2)$  do ponto de equilíbrio hiperbólico do tipo-1  $x_2 = (6, 0)$ , curva preta.

tipo-1  $x_2 = (6, 0)$ ,  $W^u(x_2)$ , intersecta a região de estabilidade fraca  $A(x^s)$  e sua variedade estável  $W^s(x_2)$  está contida na fronteira da região de estabilidade fraca  $\partial A(p)$ , de acordo com o Teorema 4.2.

A Figura 2 ilustra a fronteira da região de estabilidade do ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo-zero,  $p = (2, \frac{4}{3})$ . A fronteira da região de estabilidade de  $p = (2, \frac{4}{3})$  está contida, de acordo com a primeira parte do Teorema 4.3, na união da variedade estável  $W^s(x_1)$  do ponto de equilíbrio hiperbólico do tipo-1  $x_1 = (0, 0)$ , curva em vermelho na Figura 2, com a variedade estável  $W^s(x_2)$  do ponto de equilíbrio hiperbólico do tipo-1  $x_2 = (6, 0)$ , curva em preto na Figura 2.

## 6 Conclusão

Neste artigo, estudou-se a caracterização da fronteira da região de estabilidade fraca de um ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo zero de sistemas dinâmicos não lineares autônomos. Foram oferecidas condições necessárias e suficientes para que um elemento crítico hiperbólico pertença à fronteira da região de estabilidade fraca. Explorando as caracterizações desenvolvidas neste trabalho, esperamos no futuro próximo, entender como a região de estabilidade se comporta quando bifurcações locais do tipo Hopf ocorrem no atrator.

## Referências

- [1] F. M. Amaral and L. F. C. Alberto, Stability region bifurcations of nonlinear autonomous dynamical systems: Type-zero saddle-node bifurcations, IJRNC, vol. 21,

- 591-612, (2011).
- [2] K. J. Arrow and F. Hahn, General competitive analysis, (1971).
  - [3] H. D. Chiang, F. F. Wu and P. P. Varaiya, Foundations of direct methods for power system transient stability analysis, IEEE Transactions on Circuits and Systems-I, vol. 34, 160-173, (1987).
  - [4] H. D. Chiang, M. W. Hirsch and F. F. Wu, Stability region of nonlinear autonomous dynamical systems, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 33, 16-27, (1988).
  - [5] H. D. Chiang, C. C. Chu and G. Cauley, Direct stability analysis of electric power systems using energy functions: theory, applications and perspective, Proceedings of the IEEE, vol. 83, 1497-1529, (1995).
  - [6] M. W. Hirsch, C. C. Pugh and M. Shub, Invariant manifolds, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 76, 1015-1019, (1970).
  - [7] J. R. R. Gouveia Jr., F. M. Amaral and L. F. C. Alberto, Stability boundary characterization of nonlinear autonomous dynamical systems in the presence of a supercritical Hopf equilibrium point, IJBC, vol. 23, 1350196, (2013).
  - [8] Y. A. Kuznetsov, Elements of applied bifurcation theory, Springer, (1995).
  - [9] J. Lee and H. D. Chiang, Stability regions of non-hyperbolic dynamical systems: theory and optimal estimation, ISCAS, vol. 2, 200-203, (2000).
  - [10] R. M. May, Stability and complexity in model ecosystems, Princeton University Press, vol. 6, (2001).
  - [11] L. Perko, Differential equations and dynamical systems, Springer, (1991).
  - [12] F. H. Silva, R. B. Guedes, L. F. C. Alberto e N. G. Bretas, Função energia generalizada de controle para estabilização de sistemas não lineares, SBA: Controle e Automação Sociedade Brasileira de Automatica, vol. 20, 133-145, (2009).
  - [13] S. Smale, Differentiable dynamical systems, Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 73, 747-817, (1967).
  - [14] J. Sotomayor, Generic bifurcations of dynamical systems, Dynamical Systems, vol. 549, (1973).
  - [15] P. Varaiya, F. F. Wu and R. L. Chen, Direct methods for transient stability analysis of power systems: Recent results, Proceedings of the IEEE, vol. 73, 1703-1715, (1985).
  - [16] J. A. Véri, Estabilidade global e bifurcação de Hopf em um modelo de HIV baseado em sistemas do tipo Lotka-Volterra, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista (UNESP), (2013).