

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Uso de redes complexas para caracterização dinâmica de sistemas não-lineares

Vander Luis de Souza Freitas¹

Programa de Pós-Graduação em Computação Aplicada - CAP, INPE, São José dos Campos, SP

Elbert E. N. Macau²

Laboratórios Associados de Computação - LAC, INPE, São José dos Campos, SP

Resumo. Este trabalho explora a caracterização de dinâmica não-linear por meio da análise de redes complexas. Utilizou-se o mapa Logístico como exemplo de aplicação, por ser um paradigma de sistemas que apresentam vários tipos de dinâmica. Os resultados apontaram correspondências entre as características das redes e as dinâmicas associadas ao mapa.

Palavras-chave. Dinâmica não-linear, Sistemas caóticos, Mapa Logístico, Redes Complexas.

1 Introdução

Um modelo simples de mapa não-linear de primeira ordem é o modelo Logístico (1) para crescimento populacional

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad (1)$$

em que $r \in [0, 4]$ é o parâmetro logístico, e $x_n \in [0, 1]$ é o número (normalizado) de indivíduos da população no instante de tempo n .

Este mapa enfoca a situação não qual indivíduos convivem em um ambiente e se reproduzem pelo tempo em que existirem recursos para sua manutenção. No momento em que estes recursos se esgotam, a população se extingue e volta a se desenvolver do início. Segundo Robert May [3], este é um exemplo de modelo matemático que, apesar de simples, possui uma dinâmica complicada, exibindo diversos comportamentos.

Nas últimas décadas, os estudos em redes complexas ganharam grandes proporções, com contribuições significativas [1, 2, 4]. Uma rede complexa é um grafo em que cada vértice representa um sistema complexo, e nela é possível capturar a dinâmica entre estes indivíduos. Exemplos comuns do estudo de redes complexas: redes de transporte, telefonia, a internet, redes sociais, sistemas predador-presa, etc [2].

Neste trabalho são analisadas correspondências entre o comportamento dinâmico do mapa Logístico e suas respectivas propriedades de caracterização, obtidas a partir do

¹vander.freitas@inpe.br

²elbert.macau@inpe.br

1	2	3	...	10
[0,0.1]	(0.1,0.2]	(0.2,0.3]	...	(0.9,1]

Figura 1: Exemplo de discretização das sequências geradas pelo mapa logístico em 10 bins.

formalismo de redes complexas geradas por séries temporais criadas a partir deste mapa, seguindo uma adaptação da metodologia para conversão destas séries em redes, de Xiaoling *et al.* [5]. Ao comparar as propriedades das redes com o diagrama de bifurcação e os expoentes de Lyapunov, encontraram-se correspondências, que podem ser estendidas para a análise de outros mapas.

2 Uso de redes complexas para representar o mapa Logístico

Segundo Xiaoling *et al.* [5], a sequência de valores no intervalo $[0, 1]$, gerada pelo mapa Logístico, pode ser mapeada em N subintervalos (bins) igualmente espaçados, sem sobreposições, e de comprimento $1/N$. Por exemplo, o intervalo $[0, 1]$ segmentado em 10 subintervalos ficaria como mostra a Figura 1, de modo que cada intervalo dará origem a um nó da rede a ser construída.

Ao iterar o mapa Logístico, a partir de uma condição inicial x_0 , gera-se uma sequência $x_0, x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$, em que x_k é o resultado do mapa logístico na k -ésima iteração. Para converter esta sequência em valores inteiros de 1 a N , utiliza-se a função *Maior Inteiro*, que assinala o menor valor inteiro que seja maior ou igual a $N.x_k$ (2).

$$Y_k = [N.x_k] = \min\{i \in \mathbb{Z} | N.x_k \leq i\} \tag{2}$$

em que Y_k é o valor inteiro associado a x_k , na iteração k do mapa Logístico, N é o número de nós da rede e i é menor número inteiro tal que $N.x_k \leq i$.

Sendo assim, no caso em que $N = 10$, para $x_k = 0.78$, seu valor inteiro correspondente é $Y_k = 8$, e para $x_k = 0.7$, $Y_k = 7$. Importante observar que esta função não é um simples arredondamento, pois no caso de $x_k = 0.71$, seu valor inteiro Y_k associado é igual a 8.

Cada valor $Y_k \in [1, N]$ obtido pela função *Maior Inteiro* corresponde a um nó na rede. As arestas entre os nós são inseridas em ordem temporal, isto é, realiza-se uma conexão para cada par de valores consecutivos (Y_k, Y_{k+1}) da série temporal. Na abordagem de Xiaoling *et al.* [5], permitem-se múltiplas arestas entre um mesmo par de vértices, e autoconexão (aresta de um vértice para ele mesmo) não é permitida. Entretanto, neste trabalho, é considerado admissível realizar auto-conexão e, além disto, só pode existir uma aresta entre um par de vértices. No caso de serem inseridas múltiplas arestas entre dois vértices, algumas estatísticas da rede ficam dependentes da quantidade de iterações do mapa, como grau médio, por exemplo, que aumenta conforme aumentam as iterações.

Por exemplo, para $N = 10$, $r = 3.8$, $m = 3$ (3 iterações) e $x_0 = 0.7$, a sequência gerada é a seguinte: $\{0.7, 0.798, 0.6125448, 0.901867938\}$, com os seguintes resultados da função *Maior Inteiro*: $\{7, 8, 7, 10\}$.

É possível observar o fenômeno de duplicação de período a partir das redes geradas. Quando existe um ciclo-1, então apenas um nó da rede terá alguma aresta, e será uma

auto-ligação; para ciclo-2, dois nós irão se ligar por meio de uma aresta; com ciclo-3, três nós serão ligados por duas arestas, e assim por diante, segundo mostra a Figura 2.

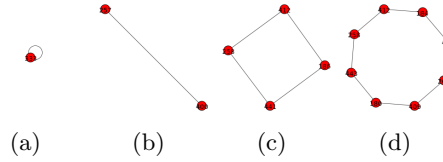


Figura 2: Redes geradas para diferentes valores do parâmetro logístico: (a) ciclo-1, $r = 2.9903$, (b) ciclo-2, $r = 3.2017$, (c) ciclo-4, $r = 3.5254$, (d) ciclo-8, $r = 3.5452$.

3 Características do mapa Logístico observadas por meio de propriedades de redes complexas

Fez-se um experimento com 1000 parâmetros logísticos no intervalo $r \in [2.9, 4]$, e $N = 500$, resultando em 1000 redes. As primeiras 500 iterações do mapa Logístico foram descartadas, utilizando-se apenas as 5000 iterações seguintes. Na representação da Figura 3, no eixo da abscissa estão os parâmetros r , o eixo da ordenada representa cada um dos 500 nós das redes geradas, e as cores representam o grau de cada vértice da rede. Percebe-se que nas redes geradas para valores de r em que ocorrem janelas periódicas, o grau médio da rede é em torno de 2 (com exceção de janelas de período 2, que possuem apenas uma aresta entre os dois vértices), pois são formados ciclos, de modo que cada vértice possui uma aresta de entrada e uma de saída. No caso caótico, em geral todos os N nós possuem conexões, e o grau médio depende da quantidade de iterações do mapa, visto que novos caminhos são criados, conforme o mapa é iterado. A seguir será visto como a quantidade de iterações altera o grau médio da rede, e conseqüentemente sua densidade, para o caso caótico, com $r = 4$.

Verifica-se, na Figura 3, que para diferentes valores de r , o número de vértices que possuem alguma aresta é diferente. E mais, existe correspondência entre este número e a densidade da rede (3), que é a quantidade de arestas da rede (E), dividido pela quantidade possível de arestas no caso da rede estar completa, em que N é o número de vértices.

$$D = \frac{E}{N(N - 1)/2} \tag{3}$$

Além disto, estas duas grandezas tem relação com os expoentes de Lyapunov do mapa Logístico (5), como será visto a seguir. Órbitas cujas condições iniciais são tão próximas quanto se queira, se afastam uma da outra em média exponencialmente, como mostra a Equação 4, em que f^n representa o mapa Logístico iterado n vezes.

$$\epsilon e^{n \cdot \lambda(x_0)} = |f^n(x_0 + \epsilon) - f^n(x_0)| \tag{4}$$

O fator de separação entre elas é determinado pelo expoente de Lyapunov (5).

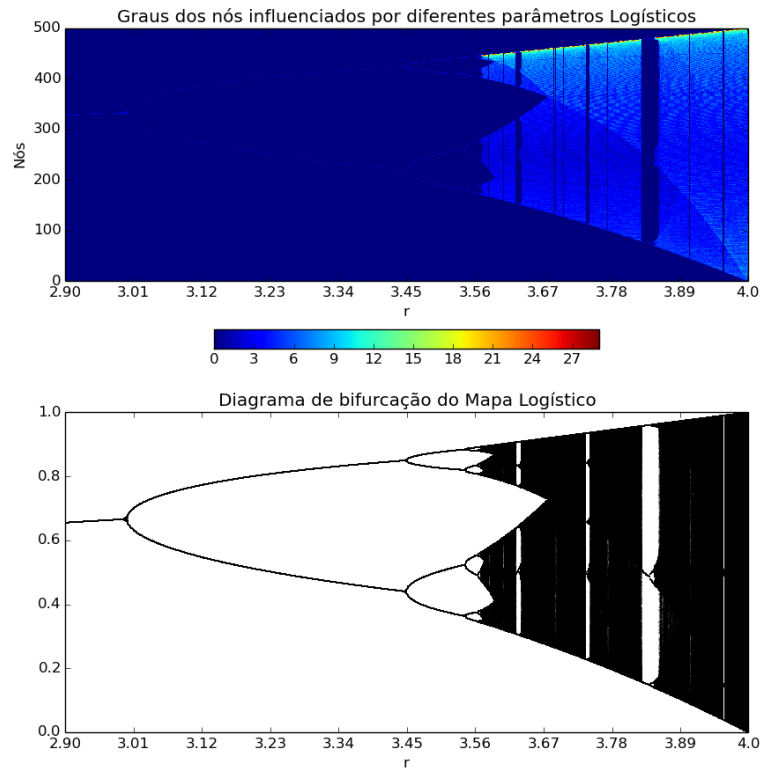


Figura 3: Relação entre os graus dos vértices das redes geradas para cada parâmetro logístico (figura superior), e o diagrama de bifurcação do mapa Logístico (figura inferior). Na figura superior, o eixo da ordenada representa os 500 nós de cada rede gerada, a abscissa representa o parâmetro r no intervalo $[2.9, 4]$, discretizado em 1000 partições, e as cores são os graus de cada vértice. Os vértices em azul mais escuro são os que possuem grau 0, portanto não possuem arestas.

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \log|f'(x_i)| \quad (5)$$

Quando o sistema apresenta caos, este expoente é maior do que zero, o que significa que existe dependência sensível às condições iniciais. Quanto mais vértices da rede são conectados, mais as trajetórias tendem a se separar, assim como nos casos em que os expoentes de Lyapunov são positivos.

A correspondência entre o número de vértices conectados, densidade das redes e os expoentes de Lyapunov pode ser observada na Figura 4a. Em adição, verificou-se que uma sequência de inteiros gerada para o caso caótico tem diferenças em relação a uma sequência gerada aleatoriamente. Ambas as redes geradas possuem todos ou quase todos os vértices conectados, no entanto as densidades das redes são diferentes. Imagine o caso em que a discretização feita pela função *Maior Inteiro* não fosse aplicada. No caso caótico, isto resultaria em redes cuja quantidade de vértices fosse igual ao tamanho da série temporal, visto que não haveriam repetições nos valores da série, e todos os nós

teriam grau 2, com exceção dos dois vértices correspondentes ao início e fim da série, os quais teriam apenas uma ligação. Por outro lado, ao serem gerados números aleatórios no intervalo $[0, 1]$, existe a possibilidade de haverem repetições de valores, e inclusive vértices com múltiplas conexões. Sob estas afirmações, pode-se dizer que a densidade das redes geradas por sequências de valores aleatórios é assintoticamente maior que a das redes geradas no caso caótico. Como visto na Figura 4b, este comportamento persiste mesmo com a discretização da função *Maior Inteiro* em 500 intervalos.

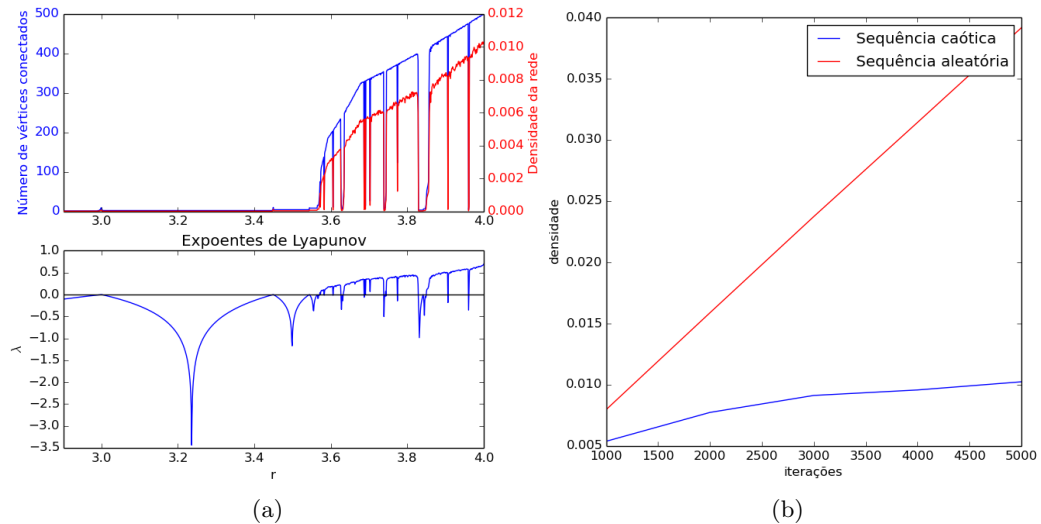


Figura 4: (a) Correspondência entre o número de vértices conectados, densidade das redes, e os expoentes de Lyapunov do mapa Logístico. (b) Diferença entre as densidades das redes geradas para o caso caótico ($r = 4$) e para o caso aleatório, em relação ao número de iterações (tamanho das sequências de inteiros).

Também foi analisado o grau médio das redes, média da medida de centralidade *betweenness* e diâmetro da rede (Figura 5). Importante observar que todas estas medidas foram tomadas das redes geradas a partir do mapa Logístico, sem considerar vértices com grau zero.

O *betweenness* quantifica a importância de um vértice (6) [2], sendo σ_{lm} o menor caminho entre os nós l e m , e $\sigma_{lm}(v)$ o menor caminho que passa por v .

$$b(v) = \sum_{l \neq v \neq m} \frac{\sigma_{lm}(v)}{\sigma_{lm}} \quad (6)$$

A Figura 5a apresenta a média das medidas de centralidade dos nós das redes para cada valor do parâmetro r . É possível observar que inicialmente o valor é próximo de zero, pois no regime periódico sempre existe mais de um caminho para ligar os vértices que participam das trajetórias, uma vez que estamos lidando com redes não-direcionais e elas tem ciclos, como mostrado na Figura 2. Entretanto, para parâmetros em que o comportamento do mapa é caótico, as trajetórias passam a ser “praticamente” únicas e sem

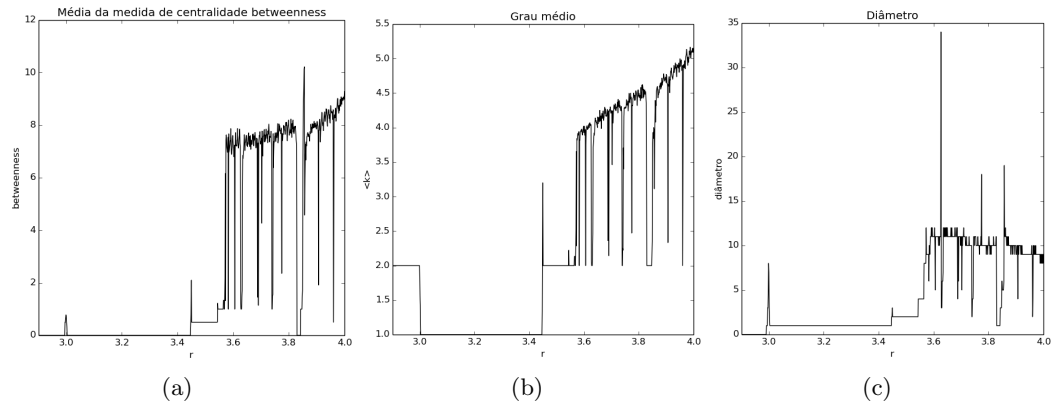


Figura 5: (a) Média da medida de centralidade *betweenness*, (b) grau médio, (c) diâmetro da rede

ciclos, de modo que os valores de *betweenness* são mais elevados, pois todo nó pertencente à trajetória é importante. É dito “praticamente”, pois como houve discretização, então acontece de alguns nós terem grau maior do que 2. Na Figura 5b, o gráfico tem forma parecida com as médias das medidas de centralidade *betweenness*.

Observou-se que é possível identificar as janelas periódicas de período 1, 2, 4, 8 e 16 com a medida do diâmetro da rede. Como visto na Figura 5(c), quando o parâmetro logístico indica ciclos de período 2, o diâmetro da rede é 1. Isto é esperado, visto que as trajetórias irão envolver apenas dois vértices, e estes estarão ligados por apenas uma aresta. No caso de período 4, qualquer nó pode ser acessado com distância máxima de duas arestas, portanto diâmetro igual a 2, e assim por diante. No caso caótico, apenas a informação do diâmetro não é suficiente para identificar caos. Observou-se que neste caso o diâmetro das redes é em torno de 10.

Alguns picos das medidas da Figura 5 correspondem a problemas de resolução da discretização, como por exemplo o diâmetro da rede para $r = 3$, que é justamente quando ocorre uma bifurcação. Espera-se que eles desapareçam para uma quantidade N muito grande de bins.

Todos os resultados mostrados dizem respeito a uma só condição inicial, pois, como mostrado por Xiaoling *et al.* [5], os resultados são praticamente idênticos para diferentes condições iniciais. Isto se deve ao fato de que o mapa Logístico tende a uma distribuição, independente de condição inicial. No caso caótico, com parâmetro logístico $r = 4$, a distribuição dos graus da rede apresenta uma curva seguindo uma lei de potência ($P(k) = k^{-\gamma}$), com $\gamma = 2.7$ (Figura 6). Quando $2.1 \leq \gamma \leq 4$, a rede é considerada livre de escala [1].

4 Conclusões

É possível discriminar dinâmicas diferentes no mapa Logístico por meio de redes complexas. E por meio delas são identificados fenômenos como a rotas de duplicação de período, janelas periódicas, e indícios de caos. Observou-se que as medidas de rede, como grau médio, número de vértices conectados, densidade e medida da centralidade *betwe-*

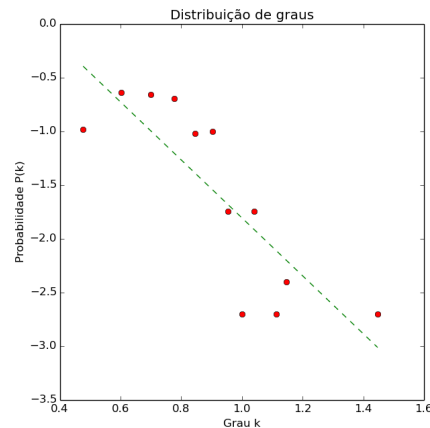


Figura 6: Distribuição de graus em base logarítmica, representada por pontos em vermelho. A reta tracejada em verde foi ajustada aos dados via mínimos quadrados

enness média possuem correspondências com os expoentes de Lyapunov e o diagrama de bifurcação do mapa Logístico. Com a medida de densidade das redes é possível identificar claramente regimes periódicos, e as densidades são diferentes para sequências apresentando comportamento caótico e sequências geradas aleatoriamente.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq pelo suporte financeiro, e à Fapesp (2011/50151-0).

Referências

- [1] A. L. Barabasi e R. Albert, Emergence of scaling in random networks. *Science*, v.286, n. 5439, p. 509-512, (1999).
- [2] S. Boccaletti et al, Complex networks: Structure and dynamics. *Physics Reports*, v. 424, n. 4-5, p. 175-308, (2006).
- [3] R. M. May, Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, v. 261, p. 459-467, (1976).
- [4] D. Watts e S. Strogatz, Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature*, n. 393, p. 440-442, (1998).
- [5] Xiaoling Y., Zhen J., Xiangguo J., Logistic mapping-based complex network modeling. *Applied Mathematics*, v. 4, n. 11, p. 1158-1562, nov. (2013).