Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 4, N. 1, 2016.
Trabalho apresentado no DINCON, Natal - RN, 2015.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Previsão de Tendência de Retornos de Ativos: Um Modelo Inspirado em Sistema de Equações Diferenciais Lineares

Charlene Cássia de Resende[1], Arthur Rodrigo Bosco de Magalhães[2], Rodrigo Tomás Nogueira Cardoso[3]
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, CEFET-MG

Resumo. A partir da hipótese de que uma série financeira temporal apresenta algum padrão e, com isso, os retornos passados trazem alguma informação do retorno futuro, desenvolvemos um modelo para a dinâmica dos preços baseado em um sistema de equações diferenciais que acoplam a evolução de preços de variadas ações. O modelo tem o objetivo de compreender a evolução do mercado e a possível previsão de tendência do preço futuro.
Palavras-chave Mercado de ações, Séries Financeiras, Equações Diferenciais e Econofísica.

1 Introdução

Cada vez mais o mercado acionário vem adquirindo uma crescente importância no cenário financeiro. A implantação do *Home Broker* pela Bovespa, em 1999, possibilitou ao investidor o envio direto de ordens à bolsa. Esta mudança na forma de negociação facilitou e aumentou significativamente a participação da pessoa física na bolsa de valores, proporcionando uma maior liquidez ao mercado. Porém, o mercado de renda variável é um sistema dinâmico que envolve diversas variáveis com dados imprevisíveis e complexos.

A teoria econômica clássica defende que não é possível obter informação de dados futuros baseando-se em informações passadas. Seus teóricos defendem que os mercados seriam, assim, eficientes, e que os preços caminham em direção a um ponto de equilíbrio no longo prazo. Esta é a denominada *hipótese de mercado eficiente* (HME). Os mercados seriam, assim, capazes de reunir o conhecimento de todos os agentes e precificar os ativos com precisão e, ainda, manter um certo nível de estabilidade [1]. De acordo com [5], que evidencia a HME, os preços das ações ajustam-se rapidamente às novas informações, tais como proventos, novos investimentos, mudança na hierarquia corporativa da empresa. Sob a teoria da hipótese de eficiência, o mercado descobre o preço correto dos ativos, não sendo possível atingir retornos acima da média sem assumir um risco acima da média.

Alguns pesquisadores defendem a HME, outros a contradizem [6]. Pesquisas no campo da econofísica têm dado outras interpretações para a hipótese e mostrado uma instabilidade de mercado. Com isso, a possibilidade do estudo, aqui proposto, se justifica com

[1]charlenecassia@gmail.com
[2]magalhaes@des.cefetmg.br
[3]rodrigoc@des.cefetmg.br

base em modelos de alguns pesquisadores que mostram que o mercado não é tão eficiente. Os modelos econômicos apresentados nos artigos [3] e [4] testam a HME utilizando a metodologia do expoente de *Hurst.* Os resultados mostram valores fora da faixa de variabilidade local, indicando que o mercado não segue o movimento browniano. Os resultados de [3], mostram que mercados emergentes são menos eficientes que mercados desenvolvidos. Estes resultados contrariam a HME, onde os expoentes devem ser próximos de 0,5. Já no artigo [2], os autores desenvolveram um modelo utilizando equações diferenciais, que incorpora o aspecto emocional dos investidores em um mercado financeiro teórico. Mostram que fatores psicológicos são capazes de influenciar na estabilidade dos preços. Se a hipótese de mercado eficiente pode ser questionada, então existe um viés de arbitragem, que possibilita auferir ganhos decorrentes de certas ineficiências do mercado e de padrões de instabilidade encontrados em algumas séries de preços.

Diante da necessidade de ferramentas que auxiliem na compreensão da dinâmica do mercado e da lacuna deixada pela HME, desenvolvemos um modelo que utiliza séries de preços para encontrar padrões e possivelmente previsão de tendência no tempo futuro. A atividade neste sentido tem sido mantida pela suposição de que muitas séries financeiras temporais apresentam alguma persistência e pela oportunidade de arbitragem. Este trabalho tem como objetivo apresentar um modelo baseado em sistemas de equações diferenciais lineares aplicados ao mercado acionário. Tem o intuito de contribuir para a compreensão da dinâmica dos mercados financeiros e mostrar desvios da HME.

2 Dados utilizados no desenvolvimento do modelo

A amostra de dados utilizada para a análise é composta por 4500 preços de fechamento-das 14 ações mais negociadas na BOVESPA no dia 09/04/2014. As empresas selecionadas foram: Itaúsa, Bradesco, Usiminas, BRF, BM&FBOVESPA, Cemig, Gerdau, Banco do Brasil, Itaú Unibanco, Petrobrás, Vale, Ambev, Pão de Açúcar e Cielo. Para simplificação e melhor avaliação dos resultados, utilizamos matrizes de correlação para selecionar, dentre as 14 séries de preços coletadas, 3 ações que irão compor o portfólio que será analisado nas etapas seguintes. O critério de escolha foi selecionar duas ações correlacionadas e uma outra que apresentava pouca ou nenhuma correlação com as duas anteriores. As ações escolhidas foram Itaúsa, Bradesco e Usiminas.

A ideia central do modelo, em relação aos dados de fechamento, é determinar um preço justo e calcular o quanto o preço bruto varia em relação a esse valor. Tal variação será aqui chamada de *preço ajustado pelo modelo.* Como é o usual [6], consideraremos aqui variações logarítmicas. Assim, definiremos a matriz

$$\mathbf{X}_t = \left[X_{k,t}\right]_{n\times 1}, \tag{1}$$

onde

$$X_{k,t} = \log x_{k,t} - \log pj_{k,t}, \tag{2}$$

sendo $x_{k,t}$ o preço original da k-ésima ação investigada no tempo t e $pj_{k,t}$ o preço justo correspondente. Contudo, determinar o preço de cada ação considerado justo pelo mercado envolve diversas variáveis que não estão no foco do estudo. Uma forma que estabelecemos

Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 4, N. 1, 2016.

como critério para o cálculo foi calcular a média móvel dos preços de fechamento, utilizando um certo período precedente ao preço analisado. Assim, o preço justo será definido como o valor da média móvel e será utilizado para retirar o ruído da série e suavizar a dinâmica dos preços brutos.

Com a matriz $\mathbf{X}_t$, podemos calcular a variação da ação no período t em relação ao período anterior $t-1$. Os valores da variação serão armazenados em uma matriz

$$\mathbf{\Delta X}_t = \left[\Delta X_{k,t}\right]_{n\times 1}, \tag{3}$$

onde

$$\Delta X_{k,t} = X_{k,t} - X_{k,t-1}. \tag{4}$$

3 O modelo

Definimos um modelo baseado em um sistema de equações de diferenças lineares e, posteriormente, exploramos o limite em que estas equações se tornam equações diferenciais. A formulação será por meio da aproximação deste modelo discreto para o limite do contínuo, tornando-o um sistema de equações diferenciais lineares.

De posse dos dados apresentados na seção 2 e embasado nos resultados das matrizes de correlação entre as ações, consideramos que a variação do preço da ação k no tempo t depende linearmente dos preços das outras ações, e, com isso, podemos definir o sistema com n equações e n incógnitas

$$\begin{cases} \Delta X_{1,t} = A_{1,1}X_{1,t} + \ldots + A_{1,n}X_{n,t} \\ \Delta X_{2,t} = A_{2,1}X_{2,t} + \ldots + A_{2,n}X_{n,t} \\ \qquad\qquad \vdots \\ \Delta X_{n,t} = A_{n,1}X_{1,t} + \ldots + A_{n,n}X_{n,t} \end{cases}, \tag{5}$$

representado na forma compacta

$$\mathbf{\Delta X}_t = \mathbf{A}\mathbf{X}_t, \tag{6}$$

em que, respectivamente, $\mathbf{X}_t$ e $\mathbf{\Delta X}_t$ são compostos por dados tratados de fechamento e variação com tempo discreto e $\mathbf{A}$ é a matriz de coeficientes $A_{i,j}$ a ser determinada.

A relação expressa na equação (6) pode ser representada para n instantes de tempo na seguinte forma:

$$\mathbf{\Delta Xn}_t = \mathbf{A}\mathbf{Xn}_t, \tag{7}$$

onde

$$\mathbf{Xn}_t = \left[X_{n,t}\right]_{n\times n} \tag{8}$$

e

$$\mathbf{\Delta Xn}_t = \left[\Delta X_{n,t}\right]_{n\times n}. \tag{9}$$

Desta forma, $\mathbf{\Delta Xn}_t$ e $\mathbf{Xn}_t$ obedecem à equação (7), em que $\mathbf{Xn}_t$ é a matriz com os preços de fechamento das ações nos tempos $t-2$, $t-1$ e t e $\mathbf{\Delta Xn}_t$ é a matriz composta pelas variações dos preços relativos aos períodos $t-2$ a t. Como conhecemos $\mathbf{\Delta Xn}_t$ e $\mathbf{Xn}_t$, podemos determinar a matriz de coeficientes $\mathbf{A}_{i,j}$ fazendo

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Delta Xn}_t \mathbf{Xn}_t^{-1}. \tag{10}$$

Como uma nova matriz $\mathbf{A}$ é calculada a cada iteração, podemos definir que a matriz varia no tempo, sendo $\mathbf{A}_t$.

3.1 Aproximação do modelo discreto para o contínuo

A formulação do modelo será por meio da aproximação do sistema de equações de diferenças, tornando-o um sistema de equações diferenciais lineares. Definindo $X_n(t) \equiv X_{nt}$ e $\mathbf{A}(t) \equiv \mathbf{A}_t$, a equação (6) fica na forma

$$\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}(t-1) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t). \tag{11}$$

Com vistas a transformarmos a equação (11) numa equação diferencial, efetuamos a seguinte alteração na mesma:

$$\frac{\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}(t-1)}{\mathbf{\Delta} t} = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t). \tag{12}$$

Agora, consideraremos a aproximação correspondente aos $\Delta t \to 0$, o que nos leva a:

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t). \tag{13}$$

que corresponde ao limite para o tempo contínuo da equação (6).

Para uma matriz $\mathbf{A}$ constante no tempo, esse sistema tem a solução

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{X}(0). \tag{14}$$

Evidentemente, o cálculo acima é válido quando a matriz $\mathbf{A}$ não depende de t. Se considerarmos os valores de $X_k(t)$ distribuídos em um conjunto de pontos correspondentes a n tempos adjacentes, conseguimos encontrar uma matriz $\mathbf{A}$ localmente constante que torna a equação (14) válida, que denominamos matriz $\mathbf{A}(t)$. Isto nos permite agregar a solução para uma janela de pontos distribuídos em n instantes de tempo adjacentes:

$$\mathbf{Xn}(t) = e^{\mathbf{A}(t)}\mathbf{Xn}(t-1), \tag{15}$$

que nos leva em

$$\mathbf{A}(t) = \ln(\mathbf{Xn}(t)\mathbf{Xn}(0)^{-1}). \tag{16}$$

4 Modelo de previsão

Partindo da hipótese de que uma série de preços apresente uma certa correlação e ainda mantenha algum padrão característico e, por isso, o preço no tempo t fornece alguma informação sobre o preço do período seguinte $t+1$, desenvolvemos um modelo de previsão

DOI: 10.5540/03.2016.004.01.0090

baseado no sistema de equações diferenciais. Nossa análise, aqui, concentram-se em verificar se o modelo acerta mais a tendência do preço do que um processo completamente aleatório, o que evidenciaria desvios da hipótese de mercado eficiente.

Para a definição do modelo de previsão partimos da equação (15), sendo esta a solução do sistema para uma janela de pontos distribuídos em n instantes de tempo adjacentes. Neste ponto, a variável $\mathbf{Xn}(t)$ mostra a matriz com os preços de fechamento das ações nos tempos $t-2$, $t-1$ e t. Como estamos interessados no preço no tempo $t+1$, definimos a equação (17), que calcula uma matriz de preços $\mathbf{Xn}(t+1)$ utilizando a matriz $\mathbf{A}(t)$:

$$\mathbf{Xn}(t+1) = e^{\mathbf{A}(t)}\mathbf{Xn}(t), \tag{17}$$

onde $\mathbf{Xn}(t+1)$, é a matriz com preços previstos das ações incluindo aqueles relativos a $t+1$. Com isto, podemos encontrar as variações no período $\mathbf{\Delta Xn}(t+1)$, que representam os retornos previstos.

5 Resultados do modelo de previsão

Quando referimos previsão de tendência é preciso analisar os dados de preços de fechamento brutos x e não mais os dados tratados X. Para o cálculo com estes dados brutos é preciso fazer a operação para reverter os dados tratados (ver equação (2)), que foram utilizados até este ponto do trabalho. A equação (18) mostra a reversão dos desvios dos preços em relação a um preço justo para preços brutos

$$x(k,t) = pj_{k,t} * e^{X(k,t)}. \tag{18}$$

Os preços reais, em alguns casos, se manteve estável no instante analisado. Já os retornos previstos não apresentaram valores nulos. Isso acontece devido à natureza do modelo ser praticamente contínua. Assim, nosso modelo não tem chance de acertar nestes casos. Como o intuito das análises estatísticas que faremos é verificar desvios da hipótese de mercado eficiente, podemos retirar os retornos nulos da análise. Observe que, mesmo após tal retirada, uma moeda justa continuaria acertando em média metade das vezes. Qualquer desvio estatisticamente consistente deste quadro caracteriza que o modelo de previsão foi diferente de um modelo completamente aleatório.

Definimos dois critérios para a previsão. No primeiro caso, utilizamos a amostra que contém todos os retornos previstos. No segundo, analisamos a amostra com o retornos previstos maiores em módulo que um certo valor k, de forma que apenas as tendências previstas com maior intensidade foram contabilizadas. A tabela 1 apresenta a taxa de acerto para cada ação para os dois critérios estabelecidos.

As taxas de acerto em ambos casos foram superiores a 50%. Percebemos que, em um balanço geral, os resultados obtidos com a amostra com as maiores tendências previstas são melhores que os resultados obtidos com a amostra com todos retornos previstos.

5.1 Validação e classificação dos resultados

O objetivo principal, aqui, é investigar se os resultados apresentados pelo modelo de previsão são melhores do que as taxas de acerto de um processo totalmente aleatório. Para

Tabela 1: Porcentagem de acerto do modelo na previsão de tendências.

Ação	Todas tendências previstas	Tendências previstas maiores que k
1	51,33%	$51,88\%$
2	50,84%	$50,47\%$
3	50,31%	$52,37\%$

isso, realizamos o teste de hipótese para analisar se estes resultados obtidos indicam que o modelo acerta mais a previsão de tendência do que uma moeda justa. O teste de hipótese realizado foi o de proporção bilateral, de forma que vamos assumir como hipótese nula $H0 = 50\%$ e hipótese alternativa $Ha \neq 50\%$, com um nível de significância$\alpha = 0,05$. A fronteira entre a região de aceitação, definida como região crítica, e a região de rejeição é determinada pelos pontos críticos $Pc1$ e $Pc2$.

A proporção de acerto do modelo de previsão para a ação da Usiminas está na região crítica, sendo o ponto crítico $Pc2 = 0,5219$ e a proporção de acerto $\hat{p} = 0,5237$. Desta forma, podemos rejeitar a hipótese nula $H0$ e assumir, a um nível de significância $\alpha = 0,05$, que o modelo tem uma taxa de acerto superior a um processo totalmente aleatório para esta ação. Para a proporção de acerto da previsão de tendência da ação do Bradesco e Itaúsa não podemos rejeitar $H0$ com um nível de significância $\alpha = 0,05$.

Para a taxa de acerto que se encontra na região crítica, elaboramos uma *matriz de confusão*, apresentada na tabela 2. Os resultados relacionados às suas métricas foram: taxa de acurácia do modelo, que indica a proporção de previsões corretas, sem levar em consideração acertos na tendência de alta e baixa, $52,37\%$. A taxa de sensibilidade, que é a proporção de acertos na tendência de alta, $52,10\%$. A taxa de especificidade, que é a proporção de acertos na tendência de baixa, $52,65\%$. A confiabilidade positiva, precisão, $52,31\%$ e a taxa de confiabilidade negativa $52,44\%$. A média harmônica entre precisão e sensibilidade, que é o F1 *score*, $52,21\%$ e o desempenho do modelo para classe de baixa, F1 *score* B, $52,54\%$.

Tabela 2: Matriz de confusão.

Previsto / Real	Alta	Baixa
Alta	520	478
Baixa	474	527

DOI: 10.5540/03.2016.004.01.0090

6 Conclusões

Os autores de [7] mostram em seu artigo que alcançam resultados de previsão de 52% e afirmam que este valor pode não parecer muito, mas é uma probabilidade melhor que 50%, quando se trata de uma grande quantidade de dados que é o mercado de ações. Sugerem ainda que esse resultado é algo notável e pode ser explorado. O nosso modelo apresenta taxas de precisão total superiores a 50%. Os melhores resultados foram obtidos com o subconjunto de maiores tendências previstas. A taxa de previsões corretas para a ação da Usiminas foi $52,37\%$. Quando aplicado o teste de hipótese a este resultado, com o objetivo de mostrar que esta taxa é superior a um processo totalmente aleatório, rejeitamos a hipótese nula $H0$. Para as ações da Itaúsa e Bradesco, as taxas de proporção de acerto do modelo não foram suficientes para rejeitar $H0$ com o nível de significância definido. Com isso, para os parâmetros utilizados, não podemos afirmar que o modelo acerta mais que uma moeda justa para estas ações. Os próximos passos do trabalho é aplicar outros parâmetros ao modelo. Analisar outras ações e, ainda, outros períodos específicos das suas séries de preços.

Agradecimentos

Os autores expressam seus agradecimentos à FAPEMIG e ao CEFET-MG.

Referências

[1] M. Buchanan, What has Econophysics ever done for us?. Nature Physics, vol 9, 317, (2013)

[2] G. Caginalp and G. B. Ermentrout, A kinetic thermodynamics approach to the psychology of ‡uctuations in financial markets. Applied Mathematics Letters, vol. 3, n. 4, 17-19, (1990), DOI:10.1016/j.physd.2006.09.036

[3] D. O. Cajueiro and B. M. Tabak, The Hurst exponent over time: testing the assertion that emerging markets are becoming more efficient. Physica A, vol. 336, 521-537, (2004), DOI:10.1016/S2212-5671(14)00714-X

[4] A. Carbone, G. Castelli and H. E. Stanley, Time-dependent Hurst exponent in financial time series. Physica A, vol. 344, 267-271, (2004), DOI: 10.1016/j.physa.2004.06.130.

[5] F. E. Fama, Efficient Capital Markets: II. The journal de finance. Vol. XLVI, n.5, (1991).

[6] R. N. Mantegna and H. E. Stanley, An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance, vol. 1, (1999).

[7] M. Rechenthin and W. Nick, Using conditional probability to identify trends in intra-day high-frequency equity pricing. Physica A 392, 6169-6188, (2013), DOI: 10.1016/j.physa.2013.08.003

