

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Uso de transformada wavelet discreta ortogonal e gráfico de recorrência para caracterização de sistemas dinâmicos não-lineares

Barbara Maximino da Fonseca Reis¹

Programa de Pós-Graduação em Computação Aplicada, INPE, São José dos Campos, SP

Elbert E. N. Macau²

Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada, INPE, São José dos Campos, SP

Marcos Gonçalves Quiles³

Instituto de Ciência e Tecnologia, Unifesp, São José dos Campos, SP

Margarete Oliveira Domingues⁴

Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada, INPE, São José dos Campos, SP

Resumo. Um sistema dinâmico possui invariantes que são obtidos por meio do gráfico de recorrência e suas medidas de quantificação. Para reduzir a complexidade computacional, este trabalho propõe utilizar a transformada wavelet discreta ortogonal para gerar um sinal suavizado que preserve a dinâmica do sistema.

Palavras-chave. Sistema Dinâmico, Gráfico de Recorrência, Análise de Quantificação de Recorrência, Transformada Wavelet Discreta Ortogonal, Mapa Logístico.

1 Introdução

A compreensão do mundo físico depende de observações, medidas, análise e predição de padrões expressos na natureza. Grande quantidade de sistemas possuem dinâmicas complexas, não-lineares e não-estacionárias, que dificultam a compreensão efetiva do sistema. Para tentar compreendê-las, utilizam-se métodos como cálculo de dimensão fractal, expoente de Lyapunov e entropia [4]. Porém, tais métodos possuem desvantagens, como a necessidade de séries temporais longas, alteração dos resultados devido a presença de ruídos, dificuldade para analisar sistemas não-estacionários [7].

Nas últimas décadas, os gráficos de recorrência [4] tornaram-se uma alternativa para o estudo de sistemas complexos. Um gráfico de recorrência é uma matriz binária simétrica

¹barbara.reis@inpe.br

²elbert.macau@inpe.br

³quiles@unifesp.br

⁴margarete.domingues@inpe.br

que demonstra a proximidade de dois estados diferentes no espaço de fases a partir de uma determinada definição de proximidade. Desta forma, o gráfico de recorrência permite tanto visualizar as estruturas da série temporal quanto estimar invariantes presentes no sistema. Para extrair as informações presentes no gráfico de recorrência, Webber e Zbilut [10] desenvolveram a análise de quantificação de recorrência. Esta análise gera quantificações estatísticas baseadas na ocorrência de pontos e de linhas, diagonais e verticais, no gráfico de recorrência.

Contudo, a quantidade de pontos de um gráfico de recorrência pode ser alta, demandando um alto custo computacional para calcular as medidas de quantificação. Para resolver este problema, buscaram-se métodos que diminuam a quantidade de pontos e preservem as invariantes do sistema. Yan et al. [11], Antoniou e Vorlow [1] propõem utilizar a transformada wavelet para suavizar o sinal enquanto Costa [2] propõem um método de suavização do gráfico de recorrência. Baseando-se na ideia de suavização do sinal, este trabalho propõe aplicar a transformada wavelet discreta ortogonal para suavizar o sinal e, assim, verificar se as dinâmicas do sistema são preservadas por meio da análise de quantificação de recorrência.

2 Fundamentos teóricos

Para a realização deste trabalho, foram utilizadas as técnicas: transformada wavelet discreta, gráfico de recorrência e análise de quantificação de recorrência.

2.1 Transformada wavelet discreta

A transformada wavelet é uma transformação integral e linear que utiliza como base uma função wavelet analisadora escolhida com certas características de localização, normalização e momentos [6].

Com essas propriedades satisfeitas essa transformada permite analisar, por exemplo, sinais em multiescalas, estruturas relacionadas a ruídos brancos não-lineares e compactação das informações [5].

Em particular, neste trabalho utiliza-se a transformada wavelet discreta ortogonal de Daubechies de ordem 1 [3] com o intuito de obter-se uma versão compacta do sinal analisado de forma a manter a dinâmica que ele representa.

2.2 Gráfico de recorrência e análise de quantificação de recorrência

O teorema de recorrência de Poincaré [9] afirma que, depois de um certo tempo, alguns sistemas retornarão a um estado muito próximo do estado inicial. Baseado neste teorema, Eckmann et al. [4] criaram o gráfico de recorrência (R) para visualizar a dinâmica de sistemas recorrentes. Matematicamente, o gráfico de recorrência é gerado por:

$$R_{i,j}^{m,\rho} = \theta(\rho - \|x_i - x_j\|), \quad (1)$$

com $x_i, x_j \in \mathbb{R}^m$, $i, j = 1, \dots, N$. Nesta representação, N é o número de estados, ρ é raio de vizinhança no ponto x_i , $\|\cdot\|$ é a norma de vizinhança, $\theta(\cdot)$ é função de Heaviside e m é a dimensão de imersão.

Se $R_{i,j} = 1$, o estado é dito recorrente e um ponto preto é marcado no gráfico. Se $R_{i,j} = 0$, o estado é dito não recorrente e um ponto branco é marcado no gráfico de recorrência.

Devido a dificuldade de classificação visual dos gráficos de recorrência, Webber e Zbilut [10] criaram a análise de quantificação de recorrência (RQA) como uma forma de potencializar estas classificações. RQA é uma técnica não-linear capaz de quantificar a dinâmica e a previsibilidade de um sistema dinâmico a partir de estruturas presentes no gráfico de recorrência, ou seja, a RQA utiliza a densidade de pontos de recorrência e as estruturas de linhas diagonais e verticais do gráfico para calcular as quantificações [7]. A Tabela 1 apresenta as quantificações utilizadas neste trabalho.

Tabela 1: Medidas de quantificação de recorrência.

Medidas	Sigla	Descrição
Taxa de recorrência	RR	Mede a densidade dos pontos de recorrência no gráfico de recorrência.
Determinismo	DET	Razão entre o número de pontos de recorrência que formam as estruturas diagonais e todos os pontos de recorrência.
Comprimento máximo das linhas diagonais	L_{max}	Indica o tempo máximo em que dois segmentos de uma trajetória ficaram próximos um do outro.
Entropia	ENTR	Representa a distribuição de frequências dos comprimentos das linhas diagonais e reflete a complexidade da estrutura determinística presente no sistema.

3 Resultados e discussão

Em relação aos sistemas dinâmicos, um mapa unidimensional é o modelo mais simples para a investigação de qualquer ferramenta. Devido a sua simplicidade, o mapa logístico foi utilizado como um teste inicial.

Popularizado por May [8], o mapa logístico é um modelo populacional para insetos descrito por:

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n), \tag{2}$$

no qual x_n representa o número de indivíduos na n -ésima geração e r é o parâmetro de controle que age como uma normalização entre a taxa de crescimento e a taxa de mortalidade da população.

Obtém-se a série temporal do mapa logístico fixando o valor do parâmetro de controle r e iterando recursivamente o mapa a partir de uma condição inicial x_0 . Nas primeiras

iterações da série, geram-se valores aleatórios para x_n , denominados transientes. Após o período transiente, os valores de x_n podem ficar alternando entre N valores fixos em uma série periódica ou entre valores de uma série aperiódica que caracterizam um comportamento caótico.

Portanto, gerou-se 240 trajetórias, cada uma com 2048 pontos (excluindo os 512 transientes), que representassem os diversos tipos de dinâmicas presentes no mapa logístico quando o parâmetro de controle varia entre $2.8 \leq r \leq 4.0$.

Em seguida, obteve-se o gráfico de recorrência (com o valor limiar $\rho = 0.10$) e calculou-se as medidas de quantificação de recorrência de cada uma dessas trajetórias. A Figura 1 apresenta os resultados obtidos. O diagrama de bifurcação e o expoente de Lyapunov foram utilizados na identificação do tipo de dinâmica do sistema. Observa-se que, diferentemente das trajetórias caóticas, as órbitas periódicas aparecem caracterizadas como tendo alto grau de determinismo e alto valor de tamanho da maior diagonal, indicando um comportamento regular.

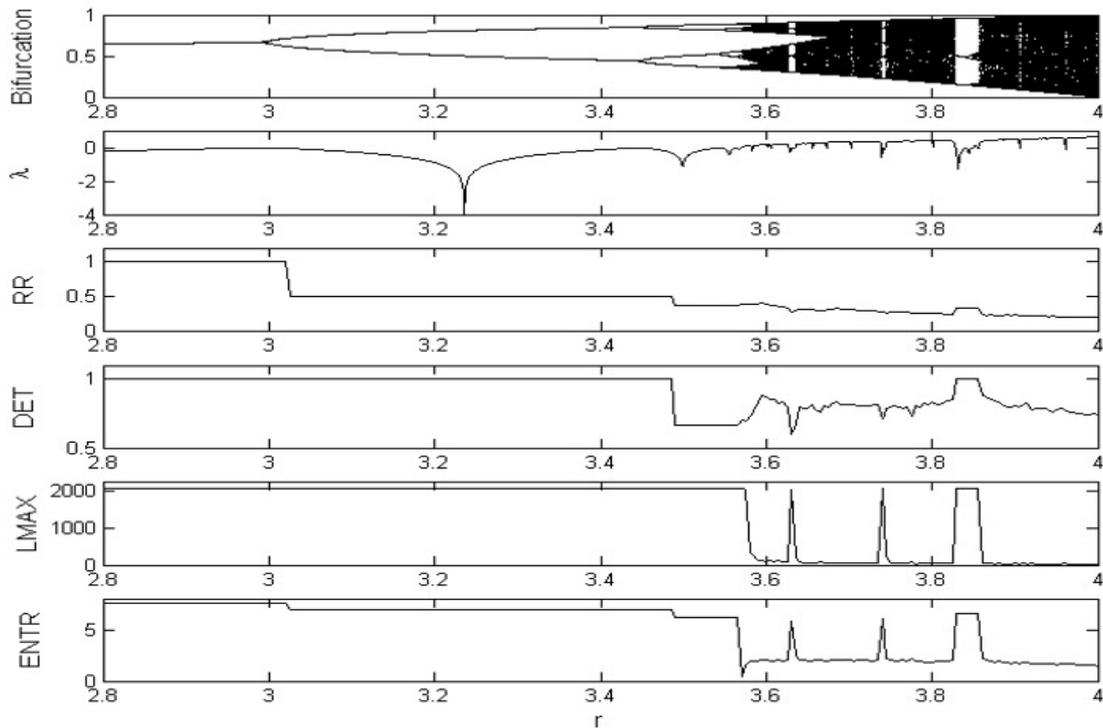


Figura 1: RQA para o mapa logístico.

Neste trabalho, utilizou-se a transformada wavelet discreta ortogonal para reduzir o tamanho das séries temporais e, assim, preservar a essência destas séries. Para isso, aplicou-se a transformada wavelet discreta ortogonal de Daubechies de ordem 1, com um nível de resolução, para obter séries suavizadas com a metade da quantidade de pontos das séries originais. Em seguida, gerou-se o gráfico de recorrência e calculou-se as medidas

de quantificação de cada trajetória (Figura 2). Observa-se que, mesmo utilizando uma versão suavizada do sinal original, as medidas de determinismo, tamanho da maior diagonal e entropia detectaram as mudanças na dinâmica do sistema.

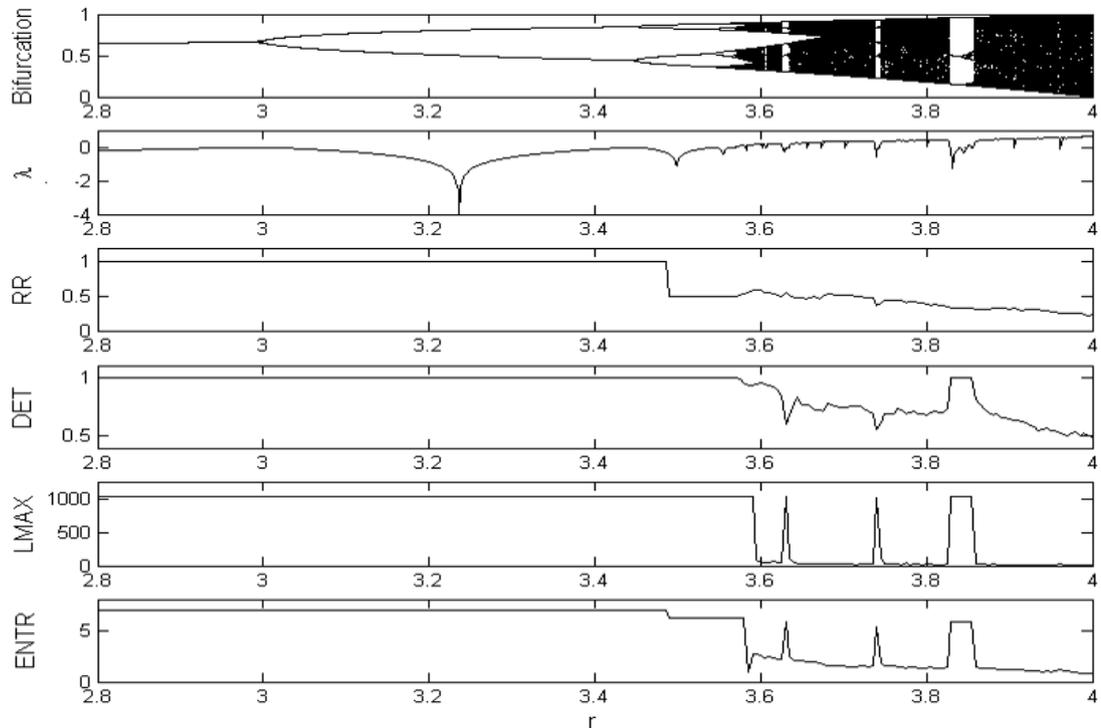


Figura 2: RQA dos gráficos de recorrência das séries resultantes da aplicação da transformada wavelet discreta ortogonal com um nível de resolução.

Aplicando a transformada wavelet discreta ortogonal de Daubechies de ordem 1, com dois níveis de resolução, obteve-se séries suavizadas com um quarto do tamanho das trajetórias originais. Novamente, após aplicar a transformada, gerou-se os gráficos de recorrência e calculou-se as medidas de quantificação de cada série. Como pode ser observado na Figura 3, as medidas de determinismo, tamanho da maior diagonal e entropia continuaram detectando as mudanças na dinâmica do sistema.

4 Conclusões e futuras perspectivas

Para o mapa logístico, a transformada wavelet discreta ortogonal foi capaz de gerar séries suavizadas que preservaram as dinâmicas do sistema. Neste caso, as medidas de determinismo, tamanho da maior diagonal e entropia foram capazes de localizar as regiões estáveis do sistema.

Como trabalho futuro, visa-se utilizar outras funções wavelet para decompor o sinal assim como calcular outras medidas de quantificações. Além disso, espera-se aplicar esta

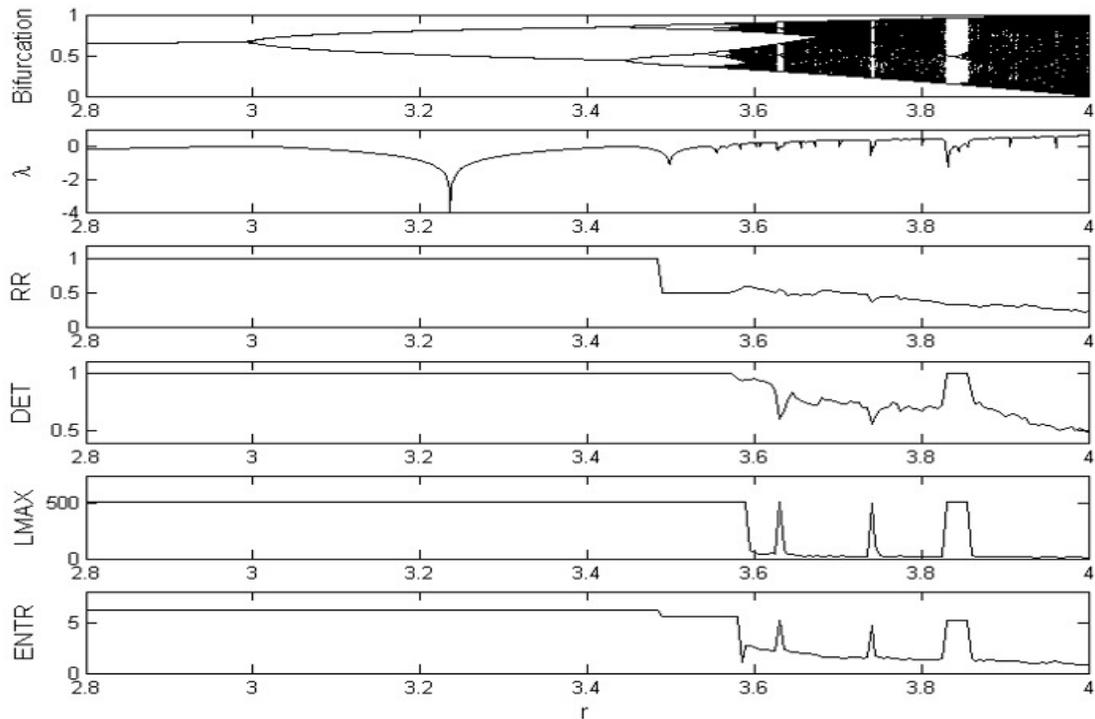


Figura 3: RQA dos gráficos de recorrência das séries resultantes da aplicação da transformada wavelet discreta ortogonal de Daubechies de ordem 1 com dois níveis de resolução.

abordagem em séries provenientes de sistemas reais.

Agradecimentos

Agradecimentos à Capes, à FAPESP e ao CNPq pelo apoio financeiro.

Referências

- [1] A. Antoniou and C. E. Vorlow, Recurrence quantification analysis of wavelet pre-filtered index returns, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 344, 257-262, (2004).
- [2] D. G. B. Costa, Uso de gráfico de recorrência e redes complexas para caracterização de sistemas complexos de baixa dimensão, *Dissertação de Mestrado em Computação Aplicada*, INPE, (2014).
- [3] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, Society for Industrial and Applied Mathematics, (1992).

- [4] J. Eckmann, S. Kamphorst and D. Ruelle, Recurrence plots of dynamical systems, *Europhysics Letters*, 973-977, (1987).
- [5] B. B. Hubbard, *The World According to Wavelets: The Story of a Mathematical Technique in the Making*, Second Edition, A K Peters, (1998).
- [6] S. G. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, (1999).
- [7] N. Marwan, M. C. Romano, M. Thiel and J. Kurths, Recurrence plots for the analysis of complex systems, *Physics Reports*, vol. 438, 237-329, (2007).
- [8] R. M. May, Simple mathematical models with very complicated dynamics, *Nature*, vol. 261, 459-467, (1976).
- [9] H. Poincaré, Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique, *Acta mathematica*, vol. 13, 1-270, (1890).
- [10] C. L. Webber Jr and J. P. Zbilut, Dynamical assessment of physiological systems and states using recurrence plot strategies, *Journal of Applied Physiology*, vol. 76, 965-973, (1994).
- [11] J. Yan, C. Zhou, C. Xia, Y. Wang, F. Li, R. Guo and H. Yan, Recurrence quantification analysis base on wavelet packets for wrist pulse, 2010 3rd International Conference on Biomedical Engineering and Informatics, vol. 3, 1011-1015, (2010).