Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Influência do Torque de Gradiente de Gravidade nas Regiões de Circulação do Movimento Rotacional de Veículos Espaciais

Maria Cecília Zanardi[1]

Centro de Engenharia, Modelagem e Ciências Sociais, UFABC, Santo André, SP,

Mariana Aquino Rodrigues Almeida[2]

Universidade Estadual Paulista, UNESP, Guaratinguetá, SP

Resumo. O movimento rotacional de um satélite artificial não simétrico, em órbita elíptica, é analisado, considerando a influência do Torque de Gradiente de Gravidade. Para a região de circulação são apresentados os espaços de fase envolvidos e o comportamento temporal das variáveis envolvidas através de uma integração numérica.

Palavras-chave. satélites artificiais, movimento rotacional, Torque de Gradiente de Gravidade, variáveis canônicas, circulação.

1 Introdução

Neste trabalho é apresentado um estudo para analisar a influência do Torque de Gradiente de Gravidade - **TGG**, através da análise de regiões de circulação e da integração numérica das equações do movimento rotacional de um satélite artificial, descritas pelas variáveis canônicas de Andoyer [3]. Aplicações são realizadas para um satélite de médio porte em órbita elíptica, considerando que este satélite possui diferentes momentos de inércia, ou seja, é um satélite não simétrico.

O TGG ocorre devido ao gradiente de força gravitacional existente em diferentes partes do satélite [4], dependendo da distribuição de sua massa e da sua forma. Este torque é importante quando o corpo não possui simetria esférica na distribuição de sua massa ou quando o eixo de rotação do satélite não se alinha na direção do vetor posição do centro de massa do satélite com relação à Terra.

Inicialmente, as equações do movimento rotacional livre de torques externos são analisadas, obtendo-se os pontos de equilíbrio do movimento, e posteriormente são

[1] cecilia.zanardi@gmail.com
[2] mari.matematica@yahoo.com.br

incluídos os termos referentes ao torque de gradiente de gravidade. Para cada abordagem são apresentados o comportamento da Hamiltoniana, o espaço de fase, para os quais são apontados a separatriz e as regiões de libração e circulação. Para verificar a ordem da influência do torque de gradiente de gravidade são realizadas integrações numéricas das equações do movimento rotacional e comparações entre os resultados obtidos para o caso livre de torques e com o TGG. Os resultados aqui apresentados serão úteis para a análise da estabilidade do movimento rotacional para satélites em órbitas elípticas.

2 Equações do Movimento

As equações do movimento são descritas em termos das variáveis de Andoyer (l_1, l_2, l_3, L_1, L_2, L_3),definidas por [3]:

- As variáveis angulares l_1, l_2 e l, são ângulos que relacionam os diferentes sistemas de referência envolvidos ;

- As variáveis métricas: L_2 é o módulo do vetor momento angular de rotação $\overrightarrow{L_2}$, L_1 é a projeção de $\overrightarrow{L_2}$ no eixo z no sistema principal e L_3 é a projeção de $\overrightarrow{L_2}$ no eixo equatorial Z.

As equações do movimento rotacional são dadas por [3,4]

$$\frac{dl_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial L_i} \ , \quad \frac{dL_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial l_i} \quad , \quad i = 1,2,3. \tag{1}$$

em que, l_i e L_i são as variáveis de Andoyer e F é a Hamiltoniana do problema, dada pela soma da Hamiltoniana F_0 do movimento livre de torques externos e a Hamiltoniana F_1 associada ao TGG, expressa por [4]

$$F(L_1,L_2,L_3,l_1,l_2,l_3,L,G,H,l,g,h)=F_0(L,l_1,L_1,L_2) +F_1(L_1,L_2,L_3,l_1,l_2,l_3,L,G,H,l,g,h) \tag{2}$$

com $(L,G,,H, l,g,h)$ sendo as variáveis de Delaunay associadas com o movimento translacional.

As expressões completas de F_0 e F_1 podem ser obtidas em[2,4] e dependem dos momentos principais de inércia, da massa do satélite e das varáveis de Delaunay.

As equações do movimento para o movimento livre de torques externos foram analisadas em [1,2], tendo sido verificado o comportamento temporal das variáveis que descrevem o movimento nas regiões de libração e circulação ao redor dos pontos de equilíbrio. Aplicações foram realizadas para um satélite de médio porte com momentos principais de inércia distintos, tendo sido determinados 3 pontos de equilíbrio, sendo dois pontos instáveis e apenas um estável. No comportamento temporal observou se variações periódicas na variável angular l_1 e na variável métrica L_1 e uma variação linear para a variável angular l_2, diretamente relacionada com a rotação do satélite.

As equações do movimento rotacional considerando o TGG são apresentadas em [2], para o caso de satélite não simétrico em órbita elíptica, com desenvolvimento até a primeira ordem na excentricidade. Estas equações foram integradas analiticamente em [4], sendo determinado que o TGG causa variações periódicas no módulo do momento angular de rotação (L_2) e em suas projeções L_1 e L_3 e variações lineares e periódicas nas variáveis angulares l_1,l_2 e l_3.

Estas equações serão utilizadas para a determinação do espaço de fase e para a análise do comportamento temporal das regiões de circulação do movimento.

3 Aplicações

As aplicações são realizadas considerando os dados de um satélite de médio porte [1,2,4], analisando o comportamento temporal das variáveis de Andoyer sob a influência do TGG para um intervalo de 500.000seg. A análise é feita para diferentes posições nas regiões de circulação do espaço de fase, sendo possível analisar os três planos de fase referentes as variáveis de Andoyer ($l_1\times$), ($l_2\times L_2$) e ($l_3\times L_3$), os quais estão apresentados na Figura 1.O espaço de fase ($l_1\times L_1$), se manteve similar ao obtido no movimento livre de torques externos. O espaço de fase ($l_2\times L_2$) foi omitido na Figura 1, mas apresenta apenas regiões de circulação com $L_2 \geq L_3$ [2]. Com a inclusão do TGG as variáveis l_3 e L_3 deixam de ser constantes, resultando em regiões de libração no plano ($l_3\times L_3$). Saliente-se que os valores de L_3 são limitados, $-L_2 \leq L_3 \leq L_2$, uma vez que L_3 é a projeção de L_2 no eixo inercial OZ.

A determinação do comportamento da Hamiltoniana e os planos de fase foram desenvolvidos com o software MATHEMATICA. A integração numérica das equações do movimento foram realizadas com o software MATLAB, utilizando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem.

Para a região de circulação foram considerados os mesmos casos utilizados na analise do movimento livre de torques [1,2], sendo:

Caso I: $l_1 = 1.8rad$ e $L_1 = 3000kgm^2/s$;
Caso II: $l_1 = 0.5rad$ e $L_1 = 9000kgm^2/s$;
Caso III: $l_1 = 2.5rad$ e $L_1 = -6000kgm^2/s$.

As Figuras 2 e 3 apresentam os comportamentos temporais das variáveis angulares e métricas de Andoyer, respectivamente, para o período de 500.000 s. O comportamento temporal da variável angular l_2 foi aqui omitida, pois nela prevalece a variação linear associada ao movimento livre de torques externos [2]. O comportamento da variável métrica L_2 também foi aqui omitido, mas é periódico com pequena amplitude [2], correspondendo a variações da ordem de 10^{-3} do valor inicial de L_2, para o intervalo considerado, sendo que no movimento livre de torques se mantinha constante.

Na Figura 2, verifica se que o TGG contribui para uma pequena variação linear em l_1, afetando o movimento de precessão do eixo de inércia Oz ao redor do eixo do momento angular do satélite. Nesta mesma figura observa se que o TGG introduz variações de curto período e variações lineares em l_3.

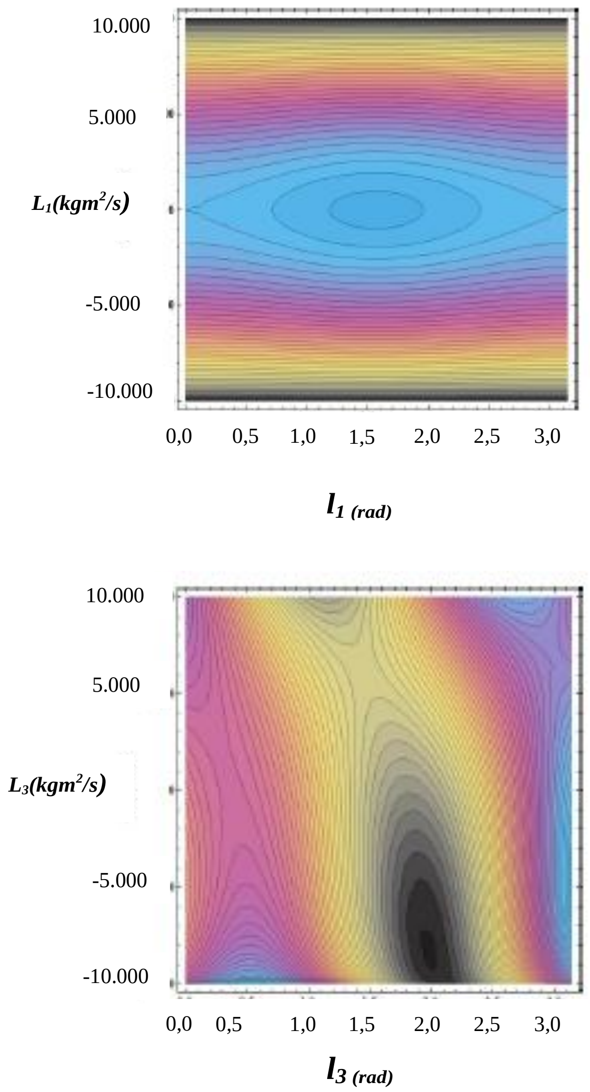

Figura 1 - Planos de fase ($l_1 \times L_1$) e ($l_3 \times L_3$)

Pela Figura 3 observam se pequenas variações periódicas na projeção do momento angular L_1, cujas amplitudes diminuem com o aumento do momento angular, de modo que o TGG introduz uma oscilação da inclinação do plano de inércia XY em relação ao plano do momento angular. Observa-se também, que o TGG introduz variações de curto período e lineares em L_3. Saliente-se que a variação linear ocorre, devido ao fato de que nas equações do movimento foi considerada como condição inicial que a anomalia média é zero, ou seja que o satélite encontra-se no perigeu de sua órbita. Com a variação da anomalia média, esta variação em L_3 passará a ser periódica de longo período. Em relação ao valor constante de L_3 no movimento sem torques externos, as diferenças nas variações em L_3 são da ordem de 10^{-2} do valor inicial de L_3 para o intervalo considerado.

4 Comentários Finais

Neste trabalho foi apresentada uma análise da influência do TGG no movimento rotacional de um satélite artificial não simétrico e em órbita elíptica, para as regiões de circulação do plano de fase. As variáveis de Andoyer mostraram-se adequadas para a análise realizada.

Para o movimento rotacional com o TGG foram analisados os espaços de fase e o comportamento temporal das variáveis de Andoyer nos mesmos pontos das regiões de circulação do espaço de fase ($l_1 \times L_1$) utilizados em [3] para o movimento livre de torques externos.

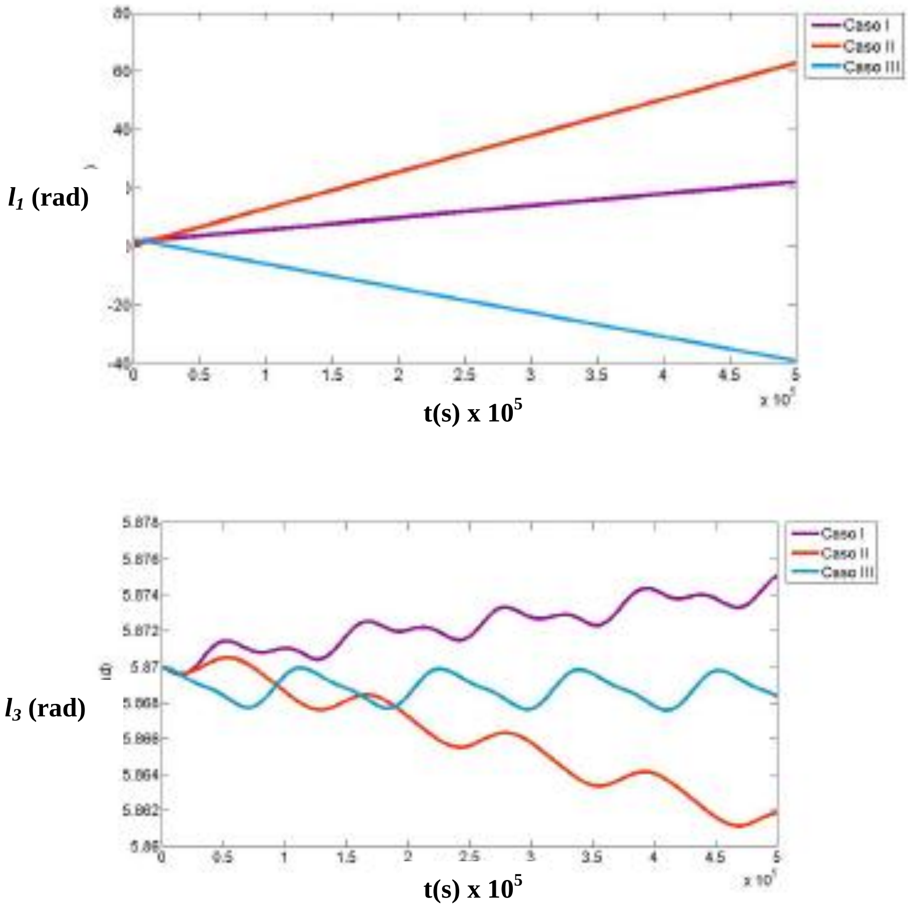

Figura 2: Comportamento temporal de l_1 e l_3.

DOI: 10.5540/03.2016.004.01.0100

Os resultados obtidos nas integrações numéricas estão de acordo com os resultados analíticos obtidos por [Zanardi, 1986]. Os resultados aqui obtidos serão em uma análise de estabilidade não linear através de um critério de estabilidade que exige a normalização da Hamiltoniana ao redor dos pontos de equilíbrio.

Agradecimentos

Os autores agradecem à FAPESP (processo N^o. 2012/21023-6) e CAPES (programa PVNS) pelo apoio financeiro.

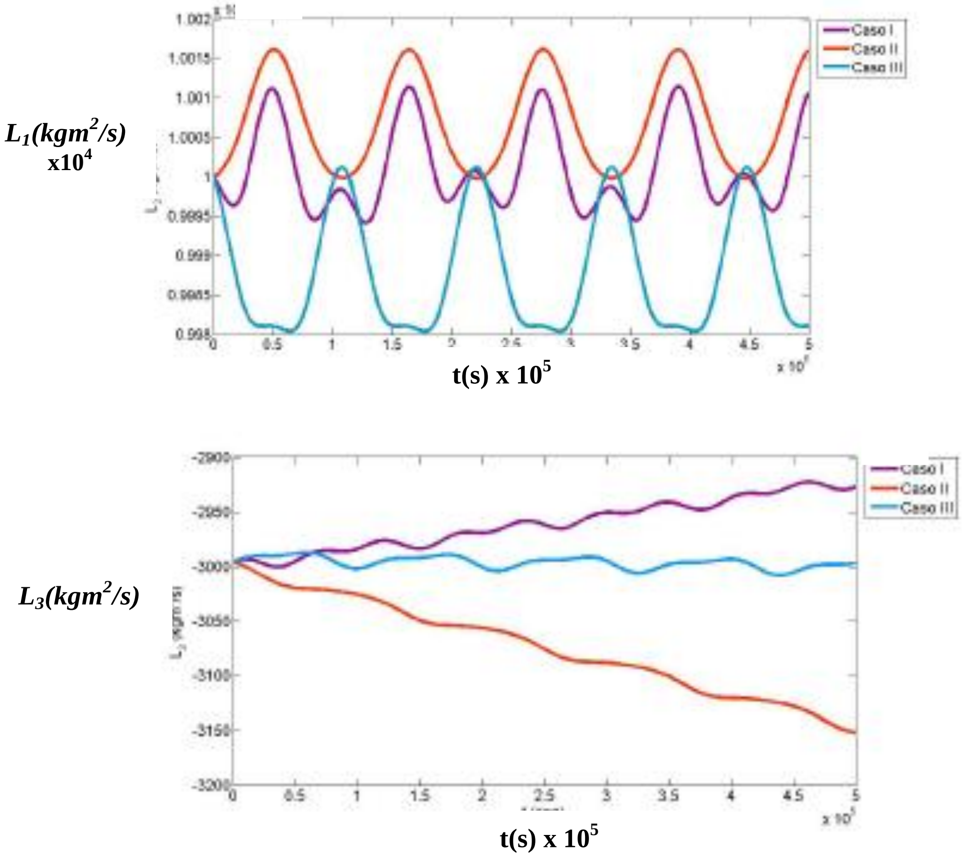

Figura 3: Comportamento temporal de L_1 e L_3.

Referências

[1] M. A. R. Almeida e M. C. Zanardi, Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, vol. 1, (2013).

[2] M A. R. Almeida, Regiões de estabilidade do movimento rotacional de veículos espaciais, Monografia de Qualificação em Física, UNESP, Guaratinguetá (2014).

[3] H. Kinoshita, First Order perturbations of two body problems, Publ. Astron. Japan.,n. 24, 423-439, (1972).

[4] M. C. Zanardi, Study of the Terms of Coupling between Rotational and Translation Motion, Celestial Mechanics, vol.39, n.2, p. 147-164, (1986).

DOI: 10.5540/03.2016.004.01.0100