Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 4, N. 1, 2016.
Trabalho apresentado no DINCON, Natal - RN, 2015.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Um estudo da dinâmica interna para um problema com Rigidez Não Linear

Célia Aparecida dos Reis[1],
Faculdade de Ciências, Departamento de Matemática, Unesp, Bauru, SP
Luis Antonio S. Vasconcellos[2]
Faculdade de Ciências, Departamento de Matemática, Unesp, Bauru, SP
Luttgardes de Oliveira Neto[3]
Faculdade de Engenharia, Departamento de E. Civil e Ambiental, Unesp, Bauru, SP

Resumo. A equação de Duffing nas suas várias formas pode ser utilizada para descrever diversos sistemas não lineares. Embora a maioria dos sistemas físicos não possa ser descrita com precisão desta forma, para uma ampla gama de condições operacionais tais como a frequência e amplitude de excitação, em muitos casos, é possível a utilização desta equação como uma descrição aproximada, de modo que seu comportamento possa ser estudado qualitativamente. Neste trabalho considera-se a análise das deflexões grandes de uma viga com rigidez não linear, cujo modelo matemático pode ser descrito por uma equação de Duffing. A linearização exata no espaço de estados é o método proposto para análise desta dinâmica não linear. Apresenta-se a análise da dinâmica interna e da estabilidade assintótica local em complementação a trabalhos publicados no ano de 2014, levando-se em conta os pontos críticos não nulos deste sistema não linear. Finalmente, exemplos numéricos são apresentados.
Palavras-chave. Equação de Duffing, Deflexão de vigas, Linearização entrada-saída, Estabilidade assintótica, Dinâmica zero.

1 Introdução

Os projetos de grandes estruturas que envolvem dados de difícil definição têm utilizado cada vez mais o recurso de monitoração durante a sua construção para tomadas de decisões. Nesses momentos, as comparações entre resultados da monitoração com os obtidos de modelos matemáticos têm permitido a continuidade na execução dessas obras com maior controle e qualidade [1]. A análise estrutural desempenha um papel importante no desenvolvimento do projeto de tais estruturas e modelos matemáticos cada vez mais sofisticados propiciam análises inimagináveis até alguns anos atrás, fornecendo subsídios para análises paramétricas e permitindo simulações de etapas construtivas com o nível de detalhamento desejado pelos projetistas [3].

Como exemplos de problemas de vibrações não lineares podem ser citados as vibrações de vigas, de cabos, de um pêndulo, de alguns isoladores, de circuitos elétricos,

[1] celia@fc.unesp.br
[2] toninho@fc.unesp.br
[3] lutt@feb.unesp.br

cujos modelos matemáticos são muitas vezes descritos por equações do tipo da Equação de Duffing [4 - 5].

Como o movimento do primeiro modo de vibração de uma viga bi-apoiada nas extremidades, com rigidez não linear e de comprimento l, pode ser modelado matematicamente por uma equação de Duffing, a metodologia abordada nestas notas será a linearização entrada-saída, aplicada nas vibrações grandes de uma viga bi-apoiada, com rigidez não linear.

O objetivo é decompor a dinâmica do sistema não linear da viga bi-apoiada na chamada *forma normal*, isto é, em uma parte externa linear (entrada-saída) e uma parte interna não linear e não observável. Para tal, define-se um novo conjunto de estados, definidos a partir da saída e suas derivadas. Desta forma, prova-se a existência de um difeomorfismo, o qual transforma o sistema não linear em outro linear de menor grau, relacionando a entrada e a saída, e em uma parte que pode ser tanto linear quanto não linear, que representa os estados não observáveis e que fornece a *dinâmica interna* do sistema original ([8], [9]).

O conhecimento da dinâmica interna é importante, pois, a partir de seu equacionamento, torna-se possível a análise da *dinâmica zero*, a qual pode ser utilizada para análise de estabilidade assintótica da dinâmica não linear em malha fechada; assim avalia-se se a linearização por realimentação pode ser usada (qualquer sistema em malha fechada tem que ser estável) ([7], [16]).

Neste trabalho apresenta-se a análise da dinâmica interna e da estabilidade assintótica do modelo matemático da viga bi-apoiada, além da utilização da linearização entrada-saída para encontrar uma lei de controle não linear que possibilita o controle das vibrações, em complementação aos resultados obtidos em [17], [18] e [19]. Finalmente, exemplos numéricos são apresentados.

Este trabalho encontra-se organizado da seguinte forma: na seção 2 apresenta-se a linearização entrada-saída para a viga bi-apoiada. Na seção 3 apresenta-se o estudo da dinâmica zero e da estabilidade assintótica local e simulações e na seção 4 as conclusões e sugestões de trabalhos futuros.

2 O Modelo Matemático Utilizado e a Linearização Entrada-Saída

Considere o oscilador de Duffing com uma força externa e um termo cúbico, dado por:

$$\ddot{x} + 2\xi\dot{x} + \alpha x + \gamma x^3 = F\,cos\Omega t \tag{1}$$

sendo que x, ξ, α, γ, f, Ω são respectivamente o deslocamento, o fator de amortecimento, parâmetro de rigidez, parâmetro de rigidez não linear, amplitude de excitação e frequência de excitação, conforme [10], [12].

Em (1), quando $\xi = 0$ e $\alpha = 1$ esta equação descreve o movimento do primeiro modo de vibração de uma viga bi-apoiada nas extremidades, de comprimento l, como na Figura 1, considerando o suporte do lado esquerdo fixo e o da direita livre para deslizar com o objetivo de evitar alongamento no plano da viga quando esta vibrar ([10]).

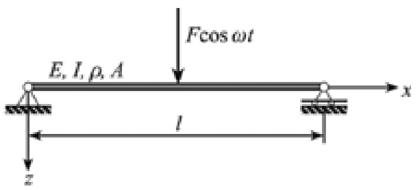


Figura 1: Vibrações de uma viga com elasticidade não linear.

De acordo com [10], uma equação que representa o movimento do primeiro modo de vibração da viga, em termos de L é dada por:

$$m\ddot{q}+k_1 q-k_3 q^3=F\cos\omega t \tag{2}$$

sendo:

$$m=\frac{\rho Al}{2} \qquad k_1=\frac{EI\pi^4}{\left(2L^3\right)} \qquad k_3=\frac{-3\pi^6 EI}{\left(16L^5\right)} \tag{2-a}$$

A função amplitude de deslocamento tem a forma:

$$\frac{L}{l}=\frac{1}{2}\left(1+\left(1-\left(\frac{q\pi}{2l}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right) \tag{3}$$

Após a substituição de (3) em (2) seguido do desprezo de potências de q maiores do que três, o termo cúbico da equação (2) é positivo, e daí a viga apresenta rigidez para grandes deflexões.

Conforme [10], a equação (2) pode ser escrita como:

$$\ddot{\tilde{y}}+\tilde{y}+\gamma\tilde{y}^3=\tilde{F}\cos\Omega\tilde{t} \tag{4}$$

sendo $\tilde{y}=\frac{q}{l}$, $\tilde{t}=w_n t$, $\Omega=\frac{w}{w_n}$, $w_n=\sqrt{\frac{k_1}{m}}$, $\tilde{F}=\frac{F}{k_1 l}$, $\gamma=\frac{l^2 k_3}{k_1}$.

A equação (4) pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}&=f(x)+g(x)\tilde{u}(t)\\ y&=h(x)\end{aligned} \tag{5}$$

sendo:

$$f(x)=\begin{bmatrix}x_2\\ -x_1-\gamma x_1^3\end{bmatrix},\quad g(x)=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\quad \tilde{u}(\tilde{t})=\tilde{F}\cos\Omega\tilde{t} \text{ e } \quad y(x)=ax_1+bx_2, b\neq 0 . \tag{5-a}$$

Prova-se que o grau relativo do sistema (5) é $r = 1$, sendo possível a análise da dinâmica interna e da dinâmica zero do sistema (5) ([7], [16], [17], [19]). Para tal, torna-se necessário a construção de um difeomorfismo $\phi(x) = [\mu, \psi]$ sendo $y = h(t) = ax_1+bx_2$ e ψ uma solução do conjunto de equações diferenciais parciais (ou EDP) $\nabla\psi\cdot g(x)=0$ ou $\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_2}=0,$ de acordo com [7] e [16].

Conforme [19] a função $\phi(x)$ é dada por:

$$\phi=\left[ax_1+bx_2,\ \psi\right] \tag{6}$$

sendo ψ a solução da EDP $\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_2}=0,$ como em (7):

$$\psi(x) = cx_1 . \tag{7}$$

Prova-se que $\phi(x)$ em (6) é um difeomorfismo global, sendo o vetor de estados (x_1, x_2):

$$x_1=\frac{1}{c}\psi \quad \text{e} \quad x_2=\frac{1}{b}\mu-\frac{a}{bc}\psi . \tag{8}$$

Além disso, $\phi(x)$ tem inversa:

$$\phi^{-1}(\mu,\psi)=\left(\frac{1}{c}\psi,\frac{1}{b}\mu-\frac{a}{bc}\psi\right). \tag{8-a}$$

A partir do conjunto de estados definidos em (8) o sistema (5) tem a *forma normal* ([7], [16], [17], [19]):

$$\dot{\mu}=\left(\frac{a}{b}\right)\mu-\frac{1}{c}\left(\frac{a^2}{b}+b\right)\psi-\frac{\gamma b}{c^3}\psi^3+b\tilde{u}(\tilde{t}\,) \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\dot{\psi}&=\frac{c}{b}\mu-\frac{a}{b}\psi\\ \tilde{y}&=\mu\end{aligned} \tag{9-a}$$

A dinâmica não linear dada por (9) relaciona entrada e saída, correspondendo à parte externa do sistema, enquanto que a dinâmica (9-a) corresponde a parte interna da dinâmica, não dependente da entrada *u(t).* Portanto, o sistema (9-a) corresponde à parte não observável e não controlável do sistema. De acordo com [17] e [19], a lei de controle não linear de equação (10) transforma a parte externa do sistema não linear (9) – (9-a), em uma dinâmica linear:

$$\tilde{u}(\tilde{t}\,)=\frac{1}{b}\left\{\left(-\frac{a}{b}\right)\mu+\frac{1}{c}\left(\frac{a^2}{b}+b\right)\psi+\frac{\gamma b}{c^3}\psi^3+v\right\}. \tag{10}$$

3 A análise da Dinâmica Zero do Sistema e da Estabilidade Assintótica

De (5), e como $\alpha = 1 \neq 0$, tem-se que a dinâmica não linear tem três pontos críticos, a saber:

$$P_1 = (0,0), \quad P_2=\left(\sqrt{\frac{-1}{\gamma}},0\right) \quad \text{e} \quad P_3=\left(-\sqrt{\frac{-1}{\gamma}},0\right) \tag{11}$$

se $\gamma < 0$ e existe um único ponto crítico, a saber, (0, 0), se $\gamma > 0$.

De (5) ou (9) – (9-a), tem-se a matriz da contraparte linear possui dois autovalores distintos e imaginários puros. Isso significa que *(0,0)* é um centro estável para a contra-parte linear da dinâmica (5) ou (9) – (9-a). Desta forma, considerando-se a dinâmica não linear (5) ou (9) – (9-a), esse ponto crítico pode ser um centro ou um ponto em espiral, assintoticamente estável, ou estável, mas não assintoticamente estável ou instável. Desta forma, não é possível estabelecer uma conclusão a respeito da estabilidade assintótica do ponto crítico *(0,0)* e nem de sua natureza.

Em [17] e [19] verificou-se, pela análise da dinâmica zero, a estabilidade assintótica da dinâmica não linear em torno da origem. Neste trabalho, a análise será efetuada em torno do ponto P_2. Considerando este ponto e a mudança de variáveis dada por:

$$\mu_1=\mu-\sqrt{\frac{-1}{\gamma}} \ \text{ e } \ \psi_1=\psi\,, \tag{12}$$

prova-se que a dinâmica zero, dada quando $y(t) = 0$ para todo $t > 0$, pode ser escrita na forma:

$$\dot{\psi}_1=-\frac{a}{b}\psi,\ \ y=0 \tag{13}$$

cuja resposta no tempo é dada pela expressão $\psi_1(\tilde{t}) = e^{\left(-\frac{a}{b}\right)\tilde{t}}$.

Assim, a dinâmica zero (13) é assintoticamente estável quando *a, b < 0* ou *a, b > 0,* em torno do ponto, coincidindo com os resultados obtidos em torno do ponto P_1 ([16], [19]). De fato, considerando-se o controle não linear:

$$\tilde{u}(t)=\left(\frac{-a-k_o}{b}\right)\mu_1+\left(-\frac{1}{c}\right)\psi_1+\left(-\frac{\gamma}{c^3}\right)\psi_1^3+\sqrt{-\frac{1}{\gamma}}\left(\frac{a-k_o}{b}\right) \tag{14}$$

para $v = -k_o y = -k_o a x_1 - k_o b x_2$, e k_o escolhido de forma conveniente tal que $p(\lambda) = \lambda + k_o$ tenha raízes negativas ([16]), torna a malha fechada da dinâmica (5) assintoticamente estável em torno do ponto P_2.

Observa-se que a análise é análoga para o ponto P_3 e também a vantagem da linearização entrada-saída para o estudo da estabilidade assintótica da dinâmica não linear. Pelo método direto de Lyapunov não é possível efetuar a análise da estabilidade em torno de P_2. Mediante o uso da estabilidade assintótica da dinâmica zero foi possível determinar a estabilidade assintótica da dinâmica não linear não só em torno da origem como dos outros dois pontos.

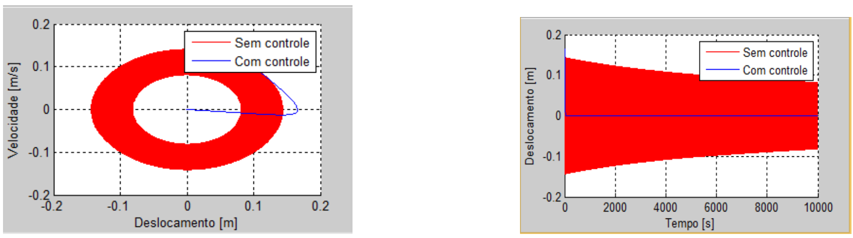
A Figura 2 mostra o efeito na resposta do sistema não linear (5), da lei de controle (14) de acordo com os valores dos parâmetros adotados na Tabela 1.

Tabela 1. Valores de parâmetros

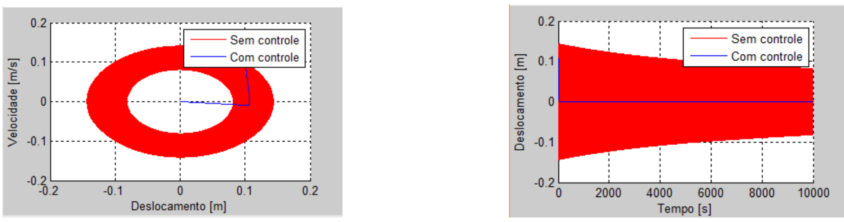
Parâmetro	***α***	***Ω***	***γ***	***F***	***a***	***b***	***c***	***ko***	***L***	***L***	***I***
Caso 1	*1*	*0,5*	*5*	*0,3*	*0,1*	*1*	*1*	*1*	*400*	*400*	*4616*
Caso 2	*1*	*0,5*	*5*	*0,3*	*1*	*0,1*	*1*	*1*	*400*	*400*	*4616*
Caso 3	*1*	*0,5*	*5*	*0,3*	*1*	*1*	*0,1*	*1*	*400*	*400*	*4616*

Considerando um exemplo prático com dimensões realistas de uma viga metálica, pode-se avaliar o comportamento da viga em função dos dados de controle. Para uma resposta dinâmica inicial, avalia-se a influência dos parâmetros *a*, *b* e *c* no problema. Assim os dados de três situações estão dispostos na Tabela 1, mantendo constante o perfil metálico, e com o peso distribuído apenas o seu peso próprio.

Considera-se um intervalo de tempo de *0* a *10.000 s*, na Figura 2, para que se perceba o comportamento assintoticamente estável do sistema, já que a rigidez nesse caso é grande e o sistema não apresenta amortecimento. Verifica-se na Figura 2, o quanto é eficiente o controle dado por (14), já que este leva a resposta para a origem em um tempo muito pequeno. As informações relativas ao Módulo de Young do aço, peso específico e força encontram-se em [19]. O comprimento *l* da viga está mensurado em *cm*.



(a) Caso 1: a = 0,1, b = 1 e c = 1



(b) (b) Caso 2: a = 1, b = 0,1 e c = 1

(c) Caso 3: a = 1, b = 1 e c = 0.1

Figura 2 - Retrato de fase e histórico do deslocamento no tempo para u(t) = $F\cos\Omega t$ **.**

4 Conclusões

Neste trabalho considerou-se a análise das deflexões grandes de uma viga com rigidez não linear, cujo modelo matemático utilizado é descrito por uma equação de Duffing. Mediante a análise da dinâmica interna do sistema, provou-se que a dinâmica não linear é assintóticamente estável não só em torno da origem, mas também em torno dos pontos fora da origem.

Introduziu-se um controle não linear (linearização por realimentação) que possibilitou a estabilização deste sistema em um intervalo de tempo bastante pequeno (realimentação de estados externa).

Simulações foram efetuadas, com e sem o controle via linearização por realimentação, onde foram feitas variações da frequência de oscilações e levando-se em conta a análise da esbelteza da viga.

Para trabalhos futuros, deseja-se analisar a primeira deflexão da viga para uma carga constante, além de uma análise das vibrações resultantes dessa carga, após um intervalo de tempo. Além disso, deseja-se efetuar uma análise global do sistema, com e sem controle, com variações dos demais parâmetros, além de avaliar a ação de uma carga, para uma viga esbelta, a ponto de levar a mesma a uma ruptura.

5 Referências

[1] R.D. Copetti, D. Migotto, D. R. Tolfo, Sobre a Resposta Dinâmica de uma Viga com Amortecimento, Mecânica Computacional, Vol. XXIX, págs.4247-4254,Argentina, 2010.

[2] N. Fiedler-Ferrara, C. P.C. Prado, *Caos – Uma introdução,* Edgar Blucher, S.P., 2009

[3] P. B. Fusco, "Estruturas de Concreto", Editora Guanabara, 1991.

[4] J. Ginsberg, "Mechanical and Structural Vibrations", John Wiley, 2002.

[5] D. Gorman, "Free Vibration Analysis of Beams and Shafts", John Wiley, 1975.

[6] M. Gürgöze, H. Erol, “Dynamic response of a viscously damped cantilever with a viscous end condition”, Journal of Sound and Vibration, 298:132″U153, 2006.

[7] A. Isidori, Nonlinear Control Systems, 3ed., Springer-Verlag, Roma, 1995.

[8] M. K. Jain, S. R. K. Iyengar, R. K. Jain, “Numerical Methods for Scientific and Engineering Computation”, Ed. John Wiley & Sons, 1985.

[9] S. G. Kelly, “Advanced Vibration Analysis”, John Wiley, 1 st edition, 2006.

[10] I. Kovacic,, M. J. Brennan- The Duffing Equation Nonlinear Oscillators and Their Behavior, Wiley & Sons, 2011.

[11] S. Naguleswaran, “Vibration of an Euler-Bernoulli beam on elastic end supports and with up to three step changes in cross-section”, International Journal of Mechanical Sciences, 44:2541– 2555, 2002.

[12] S. S. Raos, Mechanical Vibrations, Pearson Prentice Hall, New Jersey, 2004.

[13] C. A. Reis *et al.*, Asymptotic Stabilization and Internal Dynamics of a Simplified Model of a Maglev System, 22nd International Congress of Mechanical Engineering (COBEM), November 3-7, Ribeirão Preto, SP, Brazil, 2013.

[14] C. A. Reis *et al.*, The Input-State Linearization Of A Maglev Vehicle Type, 22nd International Congress of Mechanical Engineering (COBEM), Ribeirão Preto-SP, Brazil, 2013.

[15] Reis, C. A. ; Colón, D. ; Balthazar, J. M. ; Rosa, S. R. F. ; Rocha, R. T. (2014). O Comportamento de Sistemas Mecatrônicos usando Ferramentas da Dinâmica Zero. In: Airam Sausen; Paulo Sausen; Sandro Sawicki.. (Org.). Coleção Modelagem Matemática Aplicada à Resolução de Problemas nas Engenharias: 1ed.Ijuí: Editora Unijuí da Univ. Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, 2014, v.3, p.169-194.

[16] C. A Reis, J. M. Balthazar; D. Colón; S. R. F. Rosa; R. T. Rocha; B. R. Pontes Junior - Análise das Vibrações Forçadas de um Oscilador de Duffing via Linearização Exata. In: VIII Congresso Nacional de Engenharia Mecânica (CONEM 2014), 2014, Uberlândia.

[17] G. V. M. Silva, *Controlo Não Linear*, Escola Superior de Tecnologia Setúbal, Lisboa, 2003.

[18] J. Slotine and W. LI, Applied Nonlinear Control. New Jersey: Prentice Hall, 1991.

[19]L.A.S Vasconcellos, C. A. Reis, L.O Neto, “Análise das Deflexões Grandes de uma Viga Com Rigidez Não Linear Utilizando a Linearização Exata a Realimentação, Anais do XXXV Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Natal, RN, Brasil, 2014.

DOI: 10.5540/03.2016.004.01.0107