Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Caracterização dos Espaços Métricos Compactos

Flaviane Silva de Souza[1]
Matemática - Licenciatura, UNIFAL-MG, Alfenas, MG
Maria Caruline Baquião[2]
Matemática - Licenciatura, UNIFAL-MG, Alfenas, MG
José Carlos de Souza Júnior[3]
Instituto de Ciências Exatas, UNIFAL-MG, Alfenas, MG

1 Introdução

Desde o surgimento da Topologia, ficou claro que o intervalo fechado [a,b], da reta real, tinha uma certa propriedade que era crucial para demonstrar teoremas importantes tais como o Teorema de Valor Máximo e o Teorema da Continuidade Uniforme. Mas por um longo período, não estava claro como esta propriedade deveria ser formulada para um espaço topológico arbitrário. Pensava-se que a propriedade crucial era a de que todo subconjunto infinito de [a,b] tem um ponto de acumulação, e essa propriedade recebia o nome de compacidade. Mais tarde, os matemáticos perceberam que esta formulação não estava no cerne da questão e que uma formulação mais forte, em termos de coberturas abertas do espaço, é mais central. A última formulação é a que hoje chamamos de compacidade. Neste trabalho, iremos apresentar uma caracterização dos espaços métricos compactos, que foi uma parte das nossas atividades de iniciação científica.

2 Espaços Métricos Compactos

Definição 2.1: Seja um conjunto $K \subset M$. Uma cobertura aberta de K é uma família $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de conjuntos abertos em M, tal que $K \subset \cup_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda)$.

Definição 2.2: Seja $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma cobertura aberta de $K \subset M$. Dizemos que $A_{\lambda_1}, \ldots, A_{\lambda_n} \in (A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ formam uma subcobertura finita de K ⊂ M, se $K \subset A_{\lambda_1} \cup \ldots \cup A_{\lambda_n}$.

Definição 2.3: Um conjunto $K \subset M$ é compacto se toda cobertura $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de K por abertos, admite uma subcobertura finita $A_{\lambda_1}, A_{\lambda_2}, ..., A_{\lambda_n}$.

[1] fla93nr@hotmail.com
[2] mariacaruline12@hotmail.com
[3] jose.souza@unifal-mg.edu.br

Proposição 2.1: Todo conjunto fechado contido em um conjunto compacto é também compacto. Ou seja, sendo F um conjunto fechado e K um conjunto compacto, tal que $F \subset K$, então F é compacto.

Na proposição abaixo, $\mathbb{R}^n$ é tomado como uma de suas métricas usuais.
Proposição 2.2: Um subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, K é fechado e limitado.

Definição 2.4: Seja M um espaço métrico. Dizemos que $p \in M$ é um ponto de acumulação de um conjunto $A \subset M$ se toda bola com centro em p intercepta o conjunto A em um ponto diferente do próprio p.

Definição 2.5: Dizemos que um espaço métrico M tem a propriedade Bolzano-Weierstrass, se todo subconjunto infinito de M possui ponto de acumulação.

Definição 2.6: Um espaço métrico M é sequencialmente compacto, se toda sequência (x_n) de pontos de M admite uma subsequência convergente.

Teorema 2.1: Se M é um espaço métrico, então as seguintes afirmações são equivalentes:

1. M é compacto;
2. M é Bolzano-Weierstrass;
3. M é sequencialmente compacto.

Exemplo 2.1: No espaço de Hilbert $H = \{(x_n); x_n \in \mathbb{R} \text{ e } \sum\limits_{i=1}^{\infty} (x_i)^2 < \infty\}$, considere o conjunto $F = \{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$, onde para cada $n \in \mathbb{N}$, apenas a n-ésima coordenada de e_n é 1 e as demais são nulas. Dados $n \neq m$ quaisquer, temos que $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$. Logo, nenhuma sequência de elementos distintos de F admite subsequência convergente. Assim, F não possui ponto de acumulação, de modo que F é fechado, limitado e não é compacto em H.

As aplicações dos espaços métricos compactos estão previstas na próxima etapa das atividades de iniciação científica, na qual toda teoria será aplicada em fractais geométricos.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG), Brasil.

Referências

[1] J. R. Munkres. *Topology*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 2000.