Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Aplicação do Ponto Fixo de Banach na Compressão de Imagens

Maria Caruline Baquião[1]
Matemática - Licenciatura, UNIFAL-MG, Alfenas,MG
José Carlos de Souza Júnior[2]
Instituto de Ciências Exatas, UNIFAL-MG, Alfenas, MG

1 Introdução

Devido ao avanço do uso da internet, surgiu a necessidade do desenvolvimento de métodos eficientes de compressão de imagens, uma vez que estas podem tornar a navegação muito lenta. Assim, o desafio é codificar menos informação do que há na imagem original, de tal modo que a olho nu não se perceba que a imagem foi deteriorada.

Há vários métodos de compressão de imagem. Um dos mais usados é um algoritmo matemático conhecido como JPEG, que se tornou padrão para fotos digitais. Neste trabalho, iremos nos concentrar em um método que se manteve mais experimental, chamado sistemas de funções iteradas. A ideia é aproximar uma imagem fazendo o uso de figuras geométricas iguais, tendo como base o teorema do ponto fixo de Banach, o qual enunciamos a seguir:

Teorema 1.1 (Ponto fixo de Banach) *Seja M um espaço métrico completo e seja $f : M \longrightarrow N$ uma contração. Então, f admite ponto fixo, o qual é o ponto de convergência da sequência $(x_0,\ f(x_0),\ f(f(x_0)),\ \ldots)$, para todo $x_0 \in M$.*

2 Metodologia

O procedimento que iremos descrever pode ser usado para armazenar imagens na memória de um computador de um modo mais econômico, guardando um algoritmo que as construam sempre que necessário. Vamos explicar a ideia do sistema de funções iteradas tomando como exemplo o triângulo de Sierpinski, o qual será o ponto fixo de nossas iterações. Para tanto, é preciso entender as características do Triângulo de Sierpinski, o qual é a união de três cópias de si mesmo, com metade do seu tamanho. Assim, partindo de um Tiângulo de Sierpinski, podemos construir outro com os seguintes passos: (1) Encolha o Triâgulo de Sierpinski para metade do seu tamanho, a partir do seu vértice inferior esquerdo. (2) Construa uma segunda cópia deste meio Triâgulo de Sierpinski e coloque-o

[1]mariacaruline12@hotmail.com
[2]jose.souza@unifal-mg.edu.br

à direita. (3) Construa uma terceira cópia do meio Triâgulo de Sierpinski e o coloque no topo, conforme mostra a Figura 1. Dessa forma, o resultado final do processo é igual ao Triâgulo de Sierpinski original, ou seja, o Triângulo de Sierpinski é o ponto fixo do processo.

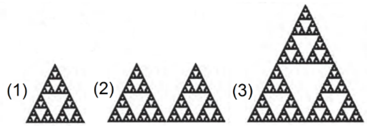

Figura 1: Passos para construção de um triângulo de Sierpinski.

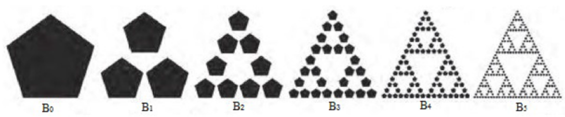

Figura 2: Pentágono B_0 e suas cinco preimeiras iterações.

Matematicamente, os passos acima são descritos pelas seguintes transformações definidas sobre $\mathbb{R}^2$: $T_1(x,y) = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$, $T_2(x,y) = (\frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \frac{y}{2})$ e $T_3(x,y) = (\frac{x}{2} + \frac{1}{4}, \frac{y}{2} + \frac{1}{2})$. Sendo S o triângulo de Sierpinsk, temos que $S = T_1(S) \cup T_2(S) \cup T_3(S)$. Considerando $W : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $W(B) = T_1(B) \cup T_2(B) \cup T_3(B)$, para todo $B \subset \mathbb{R}^2$, pode-se mostrar que W é uma contração e que seu ponto fixo é S. Assim,qualquer conjunto inicial converge para o triângulo de Sierpinski.

Por exemplo, na Figura 2, a figura utilizada é um pentágono, o qual foi iterado apenas 5 vezes $(B_1 - B_5)$. Todavia, se quisermos um Triângulo de Sierpinski com mais precisão, basta realizar um número maior de iterações, como 10 ou 20, por exemplo.

Este método produz imagens de alta qualidade, quando estas possuem caráter fractal. Este processo foi adaptado para compressão de imagens reais, como mostra [2]. Contudo, o coeficiente de compressão não é tão bom nem tão flexível como o formato JPEG, mas a simplicidade da ideia fornece um aplicação interessante do teorema do ponto fixo de Banach.

3 Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG), Brasil. Agradecemos também à UNIFAL-MG pelo apoio financeiro e transporte concedidos.

Referências

[1] H. H. Domingues. *Espaços Métricos e Introdução à Topologia.* Atual, São Paulo, 1982.

[2] J. Kominek. Advances in Fractal Compression for Multimedia Applications, *Multimedia Systems Journal*, 5:255-270, 1997.

[3] C. Rousseau. Teorema do Ponto Fixo de Banach e Aplicações, *Gazeta de Matemática*, 164:32-39, 2011.