Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Sistemas Dinâmicos e Equações Discretas

Alex Rocha Soares[1]
Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro, SP

1 Introdução

Um sistema dinâmico é um conjunto de objetos agrupados por alguma interação ou interdependência, de modo que existam relações de causa e efeito com fenômenos que ocorrem com elementos desse conjunto, onde algumas grandezas que caracterizam esses objetos constituintes variam no tempo, no qual sistemas dinâmicos descrevem vários tipos de modelos que evoluem de acordo com o tempo.

2 Equações Discretas

Dada uma função $f : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma equação discreta de primeira ordem é dada por $x(n+1) = f(n, x(n))$, onde $n > n_0(n \in \mathbb{N})$, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. Neste trabalho iremos nos ater ao caso em que a função f não depende explicitamente da variável n, ou seja:

$$x(n+1) = f(x(n)), \quad n \geq n_0 \tag{1}$$

Dado um valor inicial x_0, a solução de (1) é a sequência $x_0, f(x_0), f(f(x_0)), ...$

A equação discreta linear, dada por:

$$x(n+1) = a(n)x(n) + g(n) \quad n \geq n_0 \tag{2}$$

onde $a(n)$ e $g(n)$ são funções reais definidas para $n \geq n_0$, é dita não homogênea, e a equação homogênea associada é dada por:

$$x(n+1) = a(n)x(n), \quad n \geq n_0 \tag{3}$$

Em ambos os casos, assumimos que $a(n) \neq 0$ para $n \geq n_0$.

Dado $x(n_0) = x_0$, podemos obter a solução de (3) através de iterações:
$x(n_0 + 1) = a(n_0)x(n_0) = a(n_0)x_0$,
$x(n_0 + 2) = a(n_0 + 1)x(n_0 + 1) = a(n_0 + 1)a(n_0)x_0$,
$x(n_0 + 3) = a(n_0 + 2)x(n_0 + 2) = a(n_0 + 2)a(n_0 + 1)a(n_0)x_0$.

Através de indução finita, conseguimos mostrar que:

[1]alex.eti11@gmail.com

$$x(n) = [\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)]x_0.$$

A única solução de (2), pode ser encontrada da seguinte forma:
$x(n_0 + 1) = a(n_0)x_0 + g(n_0)$,
$x(n_0+2) = a(n_0+1)x(n_0+1)+g(n_0+1) = a(n_0+1)a(n_0)x_0+a(n_0+1)g(n_0)+g(n_0+1)$.
Assim, por indução finita obtemos que: $x(n) = [\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)]x_0 + \sum_{i=n_0}^{n-1}[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)]g(r)$.

3 Aplicação

Uma droga é administrada uma vez a cada 4 horas. Seja $D(n)$ a quantidade de droga no sistema sanguíneo no n-ésimo intervalo, considerando que cada intervalo é composto de 4 horas. O organismo elimina uma certa fração p da droga durante cada intervalo de tempo. Sendo a quantidade inicial administrada $D(0) = D_0$ vamos deduzir a equação discreta que modela o problema explicitando $D(n)$. A quantidade de droga no sistema sanguíneo em um dado intervalo, $D(n + 1)$, é igual à quantidade inicial $D(0)$ somada com a quantidade anterior $D(n)$, subtraindo-se a quantidade eliminada, dada por $pD(n)$. Obtemos então, a equação discreta: $D(n+1) = (1-p)D(n) + D_0$. E utilizando a fórmula obtida anteriormente, temos que:

$$D(n) = D_0[1 - \tfrac{1}{p}](1 - p)^n + \tfrac{D_0}{p}.$$

Observemos que, com o passar do tempo, isto é, fazendo $n \to \infty$, podemos avaliar a variação da quantidade $D(n)$, calculando $\lim\limits_{n\to\infty} D(n)$. Como $0 < 1 - p < 1, \lim_{n\to\infty} = \frac{D_0}{p}$.

Por exemplo, se $D_0 = 2cm^3$, e $p = 0,25$, então $D(n + 1) = 0,75D(n) + 2, n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n\to\infty} D(n) = 8cm^3$, que representa a quantidade equilibrada de droga no sangue.

Abaixo, apresentamos uma tabela evidenciando alguns valores para $D(n)$.

Tabela 1: Valores de $D(n)$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D(n)	2	3,5	4,62	5,47	6,1	6,58	6,93	7,2	7,4	7,55	7,66

4 Conclusão

Através do estudo de sistemas dinâmicos, é possível modelar algumas situações do cotidiano, em particular, um problema que envolve a aplicação de uma droga no sistema sanguíneo.

Referências

[1] S. Elaydi, *An Introduction to Difference Equations*. Springer, 2005.

