Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

O Método de Fourier para a Equação de Poisson

Felipe Felix Souto [1]
Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Unesp, Rio Claro, SP

1 Introdução

A Série de Fourier, o princípio fundador da Análise de Fourier, é uma expansão infinita em termos de senos e cossenos. Em Biologia, Física e Engenharia a representação em série de certas funções, em termos de senos e cossenos, é útil porque permite manipular mais facilmente tais funções que podem apresentar, por exemplo, descontinuidades, ou simplesmente são difíceis de representar analiticamente. Em particular, os campos de eletrônica, mecânica quântica e eletrodinâmica fazem uso pesado da Série de Fourier.

Neste trabalho, será apresentada a equação de Poisson na elasticidade, será utilizado o Método de Fourier para descrever uma solução para tal equação.

2 O Método de Fourier

Para desenvolver a aplicação é necessário introduzir o conceito das Séries de Fourier e citar o resultado que garante a convergência uniforme desse tipo de série.

Definição: *Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função absolutamente integrável e periódica de período $2L$. A série de Fourier que representa f é dada por:*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+b_n\,\mathrm{sen}\,\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right).$$

onde os coeficientes a_n e b_n são denominados coeficientes de Fourier e são dados, para cada $n=1,2,...$, por:

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)dx,\ \ a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\ \ e\ \ b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx.$$

Teorema :([1]) *Seja $f:[-L,L]\to\mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, seccionalmente contínua e com derivada primeira de quadrado integrável. Então, sua Série de Fourier converge uniformemente para f, em todo intervalo fechado que não contenha pontos de descontinuidade de f.*

O método utlizado neste trabalho, conhecido como Método de Fourier consiste em dois passos. O primeiro é a separação de variáveis, para obter problemas de autovalores

[1] felipe_felix_souto@hotmail.com

para EDO's, relacionadas com a EDP em estudo, obtendo uma família de soluções que satisfazem certas condições de fronteira. Equanto que o segundo utiliza essas famílias para compor a solução do problema como uma série (de senos e cossenos), cujos termos são produtos dessas soluções por coeficientes adequadamente escolhidos.

3 A equação de Poisson na eslasticidade

É conhecida da teoria da elasticidade que a função tensão $\psi(x,y)$ em uma barra satisfaz a equação de Poisson

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -2$$

em uma região R do plano xy, com $\psi = 0$ na fronteira de R, onde será considerado uma secção trasnversal retangular de dimensões a e b.
Usando a mudança de variáveis $\psi(x,y) = u(x,y) + ax - x^2$, será determinada uma solução para a função $u(x,y)$, através do Método de Fourier, na forma

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cosh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + b_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right).$$

Por fim, usando a definição dos coeficientes de Fourier e voltando na mudança de variáveis, obtém-se a solução:

$$\psi(x,y) = ax - x^2 - \frac{8a^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh((2n-1)\pi y/a)\ \operatorname{sen}((2n-1)\pi x/a)}{k^3 \cosh((2n-1)\pi b/2a)}.$$

4 Considerações Finais

Com o trabalho percebe-se a importância do estudo da Análise de Fourier. São inúmeras as aplicações, como mencionado na introdução, e no texto foi estudado o problema físico da equação de Poisson na elasticidade.

Agradecimentos

Agradeço à FAPESP (Processo 2015/00534-0) pelo apoio financeiro e à Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti pela supervisão no trabalho.

Referências

[1] D. G. Figueiredo, *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, 4ª edição. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2014.

[2] E. D. Oliveira, e J. E. Maiorino, *Introdução aos métodos da matemática aplicada*, 2ª edição. Editora Unicamp, Campinas, SP, 2003.