Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Propriedades dos Polinômios Para-Ortogonais

Maria C. Fonçatti[1]
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da FCT, UNESP, Presidente Prudente, SP
Vanessa Botta[2]
Departamento de Matemática e Computação, FCT, UNESP, Presidente Prudente, SP

1 Introdução

O objetivo deste trabalho é apresentar algumas propriedades dos polinômios para-ortogonais, que podem ser utilizados em várias aplicações, como por exemplo, na construção de fórmulas de quadratura no círculo unitário. Na seção seguinte serão apresentadas tais propriedades.

2 Resultados importantes

Seja ψ uma medida positiva no círculo unitário $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Uma sequência $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios para-ortogonais com respeito a uma medida ψ se, para $n \geq 0$, X_n é um polinômio de grau $n \geq 0$ que satisfaz

$$\begin{aligned} < X_n, 1 > &= \int_C X_n.1 d\psi(z) \neq 0 \\ < X_n, z^m > &= \int_C X_n.\overline{z^m} d\psi(z) = 0,\ m = 1, 2, ..., n-1 \\ < X_n, z^n > &= \int_C X_n.\overline{z^n} d\psi(z) \neq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Para $\kappa \in \mathbb{C}$, $\kappa \neq 0$, um polinômio X é κ-invariante se $X^*(z) = \kappa.X(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

A sequência $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ é $\{\kappa_n\}_{n=0}^{\infty}$-invariante se, para cada n, X_n é κ_n-invariante.

O resultado a seguir mostra o comportamento dos zeros dos polinômios para-ortogonais. Maiores detalhes em [1] e [2].

Teorema 1: *Seja $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência $\{\kappa_n\}_{n=0}^{\infty}$-invariante de polinômios para-ortogonais com respeito a uma medida positiva ψ. Então, para cada $n \geq 1$, os n zeros de X_n são simples e estão no círculo unitário.*

[1] mcmaria18@hotmail.com
[2] botta@fct.unesp.br

Considere agora uma sequência de polinômios ortogonais no círculo unitário, $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$, com relação à medida ψ, também chamados polinômios de Szegö. Podemos obter sequências $\{\kappa_n\}_{n=0}^{\infty}$-invariantes de polinômios para-ortogonais tomando funções da forma

$$S_n(w_n, z) = S_n(z) + w_n.S_n^*(z), \tag{2}$$

para $z, w_n \in \mathbb{C}$, com $|w_n| = 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Escolhendo $w_n = 1$ e $w_n = -1$, temos as sequências $\{S_n(1, z)\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{S_n(-1, z)\}_{n=0}^{\infty}$ e a partir delas podemos construir duas sequências de polinômios mônicos $\left\{R_n^{(1)}\right\}_{n=0}^{\infty}$ e $\left\{R_n^{(2)}\right\}_{n=0}^{\infty}$, definidos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} R_n^{(1)}(z) &= \frac{S_n(1, z)}{1 + S_n(0)} = \frac{S_n(z) + S_n^*(z)}{1 + S_n(0)} \\ &\text{e} \\ R_n^{(2)}(z) &= \frac{S_{n+1}(-1, z)}{(z-1)(1 - S_{n+1}(0))} = \frac{S_{n+1}(z) - S_{n+1}^*(z)}{(z-1)(1 - S_{n+1}(0))}. \end{aligned} \tag{3}$$

Teorema 2: *Os polinômios mônicos para-ortogonais $R_n^{(i)}$, $i = 1, 2$, satisfazem as relações de recorrência de três termos*

$$R_{n+1}^{(i)}(z) = (z+1)R_n^{(i)}(z) - 4d_{n+1}^{(i)} z R_{n-1}^{(i)}(z),\ n \geq 1, \tag{4}$$

com condições iniciais $R_0^{(i)}(z) = 1$ e $R_1^{(i)}(z) = z + 1$. Além disso,

$$d_{n+1}^{(1)} = \frac{1}{4}(1 - \alpha_{n-2})(1 + \alpha_{n-1}) \ \text{e}\ d_{n+1}^{(2)} = \frac{1}{4}(1 + \alpha_{n-1})(1 - \alpha_n),$$

onde $\alpha_n \in \mathbb{R}$ são os coeficientes de reflexão dados por $\alpha_n = -S_{n+1}(0)$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [2].

Agradecimentos

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da FCT/UNESP e à CAPES pelo auxílio financeiro.

Referências

[1] W. B. Jones, O. Njastad and W. J. Thron. Moment theory, orthogonal polynomials, quadrature rules and continued fractions associated with the unit circle, *Bulletin of the London Mathematical Society*, 113-152, 1989.

[2] A. Sri Ranga, C. F. Bracciali e E. X. L. Andrade. *Polinômios que satisfazem uma Relação de Recorrência de Três Termos*, Notas em Matemática Aplicada, SBMAC, São Carlos, 2014.