Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

Comportamento assintótico para uma classe de sequências somáveis

Luiz Otávio Fernandes[1]
DAMAT-UTFPR-CP
Wendell Palkovitz de Felice Carrijo [2]
DAMAT-UTFPR-CP
Douglas Azevedo[3]
DAMAT-UTFPR-CP

1 Introdução

Sequências e séries infinitas de números reais, apesar de formarem um tópico introdutório em disciplinas Cálculo e Análise, têm ampla utilização dentro da Matemática e da Física devido as suas diversas utilizações e aplicações.

Uma sequência (infinita) de números reais é entendida aqui como sendo uma função $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que para cada número natural n associa um valor real $a_n := a(n)$. Denotaremos por $\{a_n\} := \{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ a imagem da função a, isto é, o conjunto dos infinitos termos $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ e chamaremos este conjunto de sequência. Uma sequência é dita convergente se existir $\lim_{n\to\infty} a_n$. Adicionalmente, diremos que uma sequência $\{a_n\}$ é somável se a sequência $\{s_n\}$, definida por $s_1 = a_1$ e $s_{n+1} = a_1 + ... + a_n$ for convergente. Denotaremos $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ e $\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

Considere uma sequência $\{a_n\}$ de números reais positivos. Se esta sequência é somável, ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty,$$

então sabe-se que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Se, adicionalmente, $\{a_n\}$ for decrescente, isto é, $a_{n+1} < a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então pode-se mostrar que (veja [2])

$$\lim_{n\to\infty} na_n = 0.$$

[1]otavioluiz22@gmail.com
[2]wendellpalkovitz@outlook.com
[3]douglasa@utfpr.edu.br

Ou seja, é necessário que $n\,a_n \to 0$, quando $n \to \infty$, para que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convirja. Mais ainda, o resultado pode ser entendido como o quão veloz uma sequência decrescente e somável $\{a_n\}$ converge para zero.

Neste trabalho, pretendemos mostrar uma generalização deste resultado, cujo enunciado é apresentado a seguir.

2 Resultado principal

Pretendemos apresentar a demonstração do seguinte resultado.

Teorema *Sejam* $\{a_n\}$ *uma sequência decrescente de números reais positivos,* r *e* s *números reais positivos fixados. Se* $\{n^r a_n^s\}$ *é somável, então*

$$\lim_{n\to\infty} n^{(r+1)/s} a_n = 0.$$

Observação 1. É interessante observar que a somabilidade de $\{n^r a_n^s\}$ garante que

$$\lim_{n\to\infty} n^{r/s} a_n = 0,$$

no entanto, a monotonicidade de $\{a_n\}$ garante o comportamento no enunciado do Teorema.

Observação 2. Este resultado foi primeiramente demonstrado por Kotljar em [3]. Nosso interesse é apresentar uma demonstração mais simples deste resultado, obtida em [1].

Agradecimentos

Agradecemos ao DAMAT-UTFPR-CP e a Fundação Araucária pelo apoio financeiro.

Referências

[1] D. Azevedo and V. A. Menegatto, Eigenvalue decay of integral operators generated by power series-like kernels, *Math. Ineq. & Appl.*, 2014. DOI: 10.7153/mia-17-51.

[2] K. Knopp. *Infinite sequences and series.* Dover Publications, New York, 1956.

[3] B. D. Kotljar, Singular numbers of integral operators, (Russian) *Differentsial'nye Uravneniya*, 14:1473–1477, 1978.