Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Um Método de Mínimos Quadrados Modificado

Luana de Lima Silva Ribeiro[1]
Programa de Pós-Graduação em Matemática, UNESP, São José do Rio Preto, SP
A. Sri Ranga[2]
Departamento de Matemática Aplicada, UNESP, São José do Rio Preto, SP

1 Introdução

Neste trabalho apresentamos uma alternativa para o método de aproximação por mínimos quadrados utilizando, como classe de funções aproximantes, uma sequência de funções $\{\mathcal{W}_n\}_n$ que satisfaz uma relação de recorrência de três termos e uma condição de ortogonalidade. Apresentamos também uma condição suficiente para a convergência dos aproximantes.

De forma geral, dada uma função f em um espaço vetorial normado $(X, \|\cdot\|)$, o problema da melhor aproximação para f consiste em encontrar uma função $\hat{\phi}$ dentro de uma classe de funções aproximantes $X_n \subset X$, onde X_n é um subespaço vetorial de X com $\dim X_n = n$, que minimize a distância até f, ou seja, $\|f-\hat{\phi}\| \leq \|f-\phi\|, \forall \phi \in X_n$, veja [2].

No caso em que X é o espaço das funções reais com quadrados integráveis definidas no intervalo I munido do produto interno

$$(f,g) = \int_I f(x)g(x)d\psi(x), \quad f,g \in X, \tag{1}$$

onde $d\psi$ é uma medida positiva contínua ou discreta, o problema recebe o nome de método de aproximação por mínimos quadrados (MMQ) [2]. Como X_n possui dimensão finita, então o mesmo é gerado por um conjunto de n funções $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ linearmente independentes. Com isso, o problema é equivalente a determinar constantes c_i, $1 \leq i \leq n$, que minimizam a distância

$$\Big\|f - \sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i\Big\|_{2,d\psi} = \Big\{ \int_I \Big|f(x) - \sum_i c_i\phi_i(x)\Big|^2 d\psi(x)\Big\}^{\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

É bem conhecido que os coeficientes c_i que minimizam (2) são a solução de um sistema de equações lineares. Se as funções aproximantes são ortogonais com relação ao produto interno (1), este sistema é diagonal.

[1]luana.math@hotmail.com
[2]ranga@ibilce.unesp.br

2 Método de Mínimos Quadrados Modificado

O presente trabalho propõe um MMQ modificado, onde $X = \mathcal{L}_2(\psi)$ é o espaço das funções reais f definidas no intervalo $[-1, 1]$ tais que

$$\int_{-1}^{1} [f(x)]^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d\psi(x) < \infty,$$

e a classe de funções aproximantes está contida em Ω_m. Aqui Ω_m denota o espaço linear das funções reais em $[-1, 1]$ definido por $\Omega_0 = \mathbb{P}_0$, e se $m \geq 1$,

$$\mathcal{F}(x) \in \Omega_m \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{F}(x) = B^{(0)}(x) + \sqrt{1-x^2} B^{(1)}(x),$$

com $B^{(0)} \in \mathbb{P}_m$, $B^{(1)} \in \mathbb{P}_{m-1}$ satisfazendo $B^{(0)}(-x) = (-1)^m B^{(0)}(x)$, e $B^{(1)}(-x) = (-1)^{m-1} B^{(1)}(x)$, mais detalhes em [1]. Em $\mathcal{L}_2(\psi)$, vamos definir duas normas, a saber

$$\|g\|_A = \Big\{ \int_{-1}^{1} [g(x)]^2 \sqrt{1-x^2} d\psi(x) \Big\}^{1/2} \quad \text{e} \quad \|g\|_B = \Big\{ \int_{-1}^{1} [g(x)]^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d\psi(x) \Big\}^{1/2},$$

onde ψ é uma medida não trivial tal que a integral $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d\psi(x)$ exista. Portanto, a estratégia é, dada $g \in \mathcal{L}_2(\psi)$, encontrar uma família de aproximantes $G_m(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_m; x) \in \Omega_m$ obtidas como combinação linear de funções do tipo $\{\mathcal{W}_n, \sqrt{1-x^2}\mathcal{W}_k : n, k \in \mathbb{N}\} \subset \Omega_m$. Os elementos dos vetores

$$\boldsymbol{\alpha}_m = \big(\alpha_0^{(m)}, \dots, \alpha_{\lfloor m/2 \rfloor}^{(m)}\big)^t \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\beta}_m = \big(\beta_0^{(m)}, \dots, \beta_{\lfloor (m-1)/2 \rfloor}^{(m)}\big)^t,$$

são os coeficientes da combinação linear, e são obtidos minimizando as normas $\|g - G_m(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_m; x)\|_A$ e $\|g - G_m(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_m; x)\|_B$ utilizando uma propriedade de orgonalidade das funções $\{\mathcal{W}_n\}_n$. Com isso, obtemos uma condição suficiente para que os aproximantes satisfaçam

$$\|G_m(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_m; x) - g\|_A \longrightarrow 0.$$

A principal vantagem dessa modificação é que se aplicarmos o MMQ clássico para esta classe de funções aproximantes, o sistema linear correspondente não é diagonal, enquanto que o sistema correspondente ao MMQ modificado é quase diagonal e gera os coeficientes $\boldsymbol{\alpha}_m$ e $\boldsymbol{\beta}_m$ explicitamente. Além disso, experimentos numéricos têm nos encorajado, pois mostram interessantes comportamentos da convergência.

Agradecimentos

Os autores agradecem CAPES, CNPq e FAPESP pelo apoio financeiro.

Referências

[1] C.F. Bracciali, J.H. McCabe, T.E. Pérez, A. Sri Ranga, A class of orthogonal functions given by a three term recurrence formula, *Mathematics of Computation*, (2015), DOI:10.1090/mcom3041.

[2] W. Gautschi, *Numerical Analysis*, Springer, 2012, ISBN: 978-0-8176-8258-3.