Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Existência de soluções para uma classe de equações de Kirchhoff

Francisco Helmuth Soares Dias[1]
Programa de Pós-Graduação em Matemática, UFRGS, Porto Alegre, RS
Márcio Luís Miotto[2]
Departamento de Matemática, UFSM, Santa Maria, RS

1 Introdução

O problema clássico de Kirchhoff é a versão estacionária da equação

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L}\int_0^L \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{1}$$

proposta por [3], a qual é uma generalização da conhecida equação de corda vibrante de D'Alembert. O modelo descrito em (1) leva em conta as mudanças no comprimento da corda produzida por vibrações transversais, sendo L o comprimento da corda, h a área da seção transversal, E o módulo de Young do material, ρ a densidade da massa e P_0 a tensão inicial.

Motivados por [2], apresentaremos resultados novos para a seguinte classe de problemas do tipo Kirchhoff:

$$\begin{cases} -\big(a + b\|u\|^2\big)\Delta u = \lambda u + h(x)u^q, \ x \in \Omega, \\ u = 0, \ x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave, $N = 1,\ 2,$ ou 3, $a > 0, b > 0$, $0 < q < 1$, e as funções $h(x)$ e λs, com $\lambda > 0$, satisfazem hipóteses que serão introduzidas oportunamente.

Da mesma forma que [4], [5] e [8], utilizamos no decorrer do trabalho métodos variacionais.

2 Resultados

Os resultados por nós obtidos, são os seguintes:

Teorema 2.1. *Suponhamos que $h \in L^\infty(\Omega)$ e $h(x) \gneqq 0$. Então para cada $0 < \lambda < a\lambda_1$ o problema (2) tem ao menos uma solução positiva, onde $\lambda_1 > 0$ denota o primeiro autovalor de $-\Delta$ em Ω.*

[1]kxchico@yahoo.com.br
[2]miottomatica@gmail.com

Teorema 2.2. ***(i)*** *Suponhamos que $h(x) \lneqq 0$, $h \in L^p(\Omega)$ para algum $\frac{2^*}{2^*-1-q} \leq p \leq \infty$ e que existe $\delta > 0$ tal que $h(x) \leq -\delta$. Então para $\lambda > a\lambda_1$ o problema (2) com $b = 0$, possui uma solução não negativa $u \in H_0^1(\Omega)$ com nível de energia positivo;*
(ii) *Se $h(x) \equiv 0$, então o problema (2) com $b = 0$, admite solução positiva somente se $\lambda = a\lambda_1$.*

Teorema 2.3. ***(i)*** *Se $h(x) \gneqq 0$, então para todo $\lambda \geq a\lambda_1$ o problema (2) com $b = 0$, não tem solução positiva;*
(ii) *Se $h(x) \lneqq 0$, então para cada $0 < \lambda \leq a\lambda_1$, o problema (2) com $b = 0$, não admite solução positiva.*

3 Conclusões

A ideia principal dos métodos variacionais é relacionar a existência de soluções de uma equação à existência de pontos críticos de um funcional associado a equação. Ao longo do desenvolvimento deste trabalho utilizamos técnicas de minimização combinadas com o Princípio Variacional de Ekeland [1] e o Teorema do Passo da Montanha [6].O primeiro nos fornece soluções com nível de energia negativo, enquanto que o segundo nos contempla com soluções com nível de energia positivo. Para obter soluções positivas, fazemos uso do Princípio do Máximo Forte [7].

Referências

[1] D. G. De Figueiredo. *Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1989.

[2] L. Ding, L. Lin and J. L. Zhang. Solutions to Kirchhoff equations with combined nonlinearities, *Electronic Journal of Differential Equations*, 10:1–10, 2014.

[3] G. Kirchhoff. *Mechanik*. Teubner, Leipzig, 1883.

[4] S. Li, S. Wu and H. S. Zhou. Solutions to semilinear elliptic problems with combined nonlinearities, *Journal of Diff. Equations*, 185:200–224, 2002.

[5] Z. Liang, F. Li and J. Shi. Positive solutions to Kirchhoff type equations with nonlinearities having prescribed asymptotic behavior, *Annales de I. H. Poincare (C) Nonlinear Analysis*, 31:155–167, 2013.

[6] M. A. Schechter. A variation of the Mountain Pass lemma and applications, *Journal London Math. Soc.*, 44:491–502, 1991.

[7] J. L. Vazquez. Strong Maximum Principle for some quasilinear elliptic equations, *Applied Mathematics and Optimization*, 12:191–202, 1984.

[8] Z. Zhang and K. Perera. Sing changing solutions of Kirchhoff type problems via invariant sets of descent flow, *J. Math. Anal. Appl.*, 317:456–463, 2006.

