Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Representação de Funcionais Lineares no espaço $C([a,b],\mathbb{R})$

Caren Louize Brancaglioni[1]
Faculdade de Engenharia, UNESP, Ilha Solteira, SP
Luis Antonio Fernandes de Oliveira[2]
Departamento de Matemática, UNESP, Ilha Solteira, SP

1 Introdução

Neste trabalho usaremos a integral de Riemann-Stieltjes para obter uma representação para os funcionais lineares definidos no espaço das funções contínuas.

2 Teoremas e definições[1]

Definição 2.1. *Dada $x : [a,b] \to \mathbb{R}$, para cada partição $P = \{t_0, \cdots, t_n\}$ de $[a,b]$, seja $V(x;P) = \sum_{i=1}^{n} |x(t_i) - x(t_{i-1})|$. Quando o conjunto $\{V(f;P);\ P =$partição de $[a,b]\}$ for limitado, diz-se que f é uma função de variação limitada e escreve-se $V_a^b(f) = supV(f,P)$.*

Definição 2.2. *Seja $BV[a,b]$ o espaço de Banach de funções de variação limitada em $[a,b]$, com norma tomada por $\|x\| = V(x) + |x(a)|$, onde $x(t) \in BV[a,b]$.*

Definição 2.3. *A função $g(t) \in BV[a,b]$ é dita normalizada se $g(a) = 0$ e se g é contínua pela direita, isto é, $\forall\ t \in [a,b]$, $\lim_{k\to 0^+} g(t+k) = g(t)$. A coleção de funções normalizadas de variação limitada será denotada por $NBV[a,b]$.*

Antes de enunciarmos o Lema abaixo, vale ressaltar que $\sim$ é dada por

$$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow \int_a^b y(t)dx_1(t) = \int_a^b y(t)dx_2(t),\ \forall\ y \in C[a,b],$$

e $\widehat{x}$ é o único representante para cada classe de equivalência de $BV[a,b]$.

Lema 2.1. *Seja $x_1,\ x_2 \in BV[a,b]$ onde $x_1 \sim x_2$ e x_1 e x_2 são normalizadas $\widehat{x} \in NBV[a,b]$, tal que $(x - \widehat{x}) \sim 0$.*

$C[a,b]$ é o espaço de funções contínuas em $[a,b]$ tomado valores complexos e $\tilde{C}[a,b]$ é o espaço conjugado de $C[a,b]$, isto é, $\tilde{C}[a,b]$ é o espaço vetorial de todos os funcionais lineares limitados e contínuos, $f:\ C([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

[1]caren.lo@hotmail.com
[2]lafo@mat.feis.unesp.br

Teorema 2.1. *O espaço* $\tilde{C}[a,b]$ *e* $NBV[a,b]$ *são congruentes. Em particular, a congruência é dada pela transformação linear* $T : NBV[a,b] \to \tilde{C}[a,b]$*, definida como* $T(g(t)) = f(x)$*, onde, para* $x \in C[a,b]$

$$f(x) = \int_a^b x(t)dg(t) \tag{1}$$

Teorema 2.2. *Seja* $f \in \tilde{C}[a,b]$*. Existe uma função* $g(t) \in BV[a,b]$ *tal que* $\forall\ x \in C[a,b]$*,* $f(x) = \int_a^b x(t)dg(t)$ *e tal que* $\|f\| = V(g)$*.*

3 Construção de $NBV[a,b]$

O Teorema 2.1 é um teorema de representação para os funcionais lineares limitados em $C[a,b]$. Pode-se observar que assim como $g(t)$ satisfaz (1), $g(t)+k$ também o satisfaz. Por conta disso, utilizamos a relação de equivalência $\sim$ em $BV[a,b]$ e $x \sim 0$ se para algum c tal que $a < c < b$,

$$x(a) = x(b) = \lim_{t\to 0^+} x(c+t) = \lim_{t\to 0^-} x(c-t).$$

O Lema 2.1 nos garante a unicidade da função representante $\widehat{x}$. Assim,

$$\widehat{x}(t) = \begin{cases} 0, \ se\ t = a \\ x(t+0) - x(a), \ se\ a < t < b \\ x(b) - x(a), \ se\ t = b \end{cases},$$

onde $x(t) \in BV[a,b]$. Podemos afirmar sobre a função que $\widehat{x}(t) \in NBV[a,b]$, $V(\widehat{x}) \leq V(x)$ e $\widehat{x} \sim x$. Portanto, $(x - \widehat{x}) \sim 0$.

4 Conclusões

A função T nos diz que para todo funcional linear definido em $C[a,b]$, existe alguma função correspondente de variação limitada $g(t)$ definida em $[a,b]$, conhecida como função peso. Essa relação pode ser representada pelo diagrama: $BV[a,b] \overset{D_{2.3}}{=} NBV[a,b] \overset{T_{2.1}}{\approx} \widetilde{C}[a,b]$, onde $D_{2.3}$ é a Definição 2.3 e $T_{2.1}$ é o Teorema 2.1. Além disso, (1) é a Integral de Riemann-Stieltjes[2], na qual se tomarmos $g(t) = t$, recairíamos sob a Integral de Riemann.

Agradecimentos

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro (Processo: 111602/2014-9 / PICME/OBMEP).

Referências

[1] G. Bachman, and L. Narici. *Functional Analysis.* Academic Press Inc., New York and London, 1966.

[2] R. G. Bartle. *Elementos de Análise Real.* Editora Campus, Rio de Janeiro, 1983.