Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Estabilidade do Modelo Takagi-Sugeno Fuzzy SIS via Desigualdades Matriciais Lineares

Whendelly Lorena Leite Alves[1]
Michele Cristina Valentino[2]
Departamento Acadêmico de Matemática, UTFPR, Cornélio Procópio, PR

1 Introdução

Analisar a solução de alguns sistemas não lineares pode ser uma tarefa difícil devido as suas complexidades. Por isso, neste trabalho será abordada a modelagem Takagi- Sugeno (T-S) fuzzy, afim de garantir a estabilidade do sistemas não linear Suscetível-Infectado-Suscetível (SIS) apenas verificando se um conjunto de LMIs são factíveis. Essa factibilidade pode ser resolvida com os pacotes LMI control toolbox ou SeDuMi do MATLAB.

2 Modelagem T-S fuzzy e análise de estabilidade via LMI do modelo SIS

Considere o modelo SIS, com ponto de equilíbrio deslocado para a origem, escrito na forma matricial [1],

$$\begin{bmatrix} \dot{y_1} \\ \dot{y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & -\frac{\alpha\Delta}{\mu} + \beta - \alpha y_1 \\ \alpha y_2 & \frac{\alpha\Delta}{\mu} - (\delta + \mu + \phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

em que, Δ é a taxa de recrutamento, nascimentos e imigrações de suscetíveis; α é a taxa de infecção; β é a taxa de remoção; μ é a taxa de mortalidade por causas naturais; ϕ é a taxa de mortalidade devido à doença.

A modelagem T-S fuzzy em $Z = \left\{y \in \mathbb{R}^2 / -5 \leq y_1 \leq 5 \ e \ -5 \leq y_2 \leq 5\right\}$ [3] é dada por $\dot{y} = \sum_{i=1}^{4} h_i(y) A_i y,$ em que as matrizes dos modelos locais e as funções de pertinência são dadas respectivamente por

$$\begin{gathered} A_1 = \begin{bmatrix} -\mu & -\frac{\alpha\Delta}{\mu} + \beta + 5\alpha \\ 5\alpha & \frac{\alpha\Delta}{\mu} - (\delta + \mu + \phi) \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} -\mu & -\frac{\alpha\Delta}{\mu} + \beta + 5\alpha \\ -5\alpha & \frac{\alpha\Delta}{\mu} - (\delta + \mu + \phi) \end{bmatrix}, \\ A_3 = \begin{bmatrix} -\mu & -\frac{\alpha\Delta}{\mu} + \beta - 5\alpha \\ -5\alpha & \frac{\alpha\Delta}{\mu} - (\delta + \mu + \phi) \end{bmatrix}, \ A_4 = \begin{bmatrix} -\mu & -\frac{\alpha\Delta}{\mu} + \beta - 5\alpha \\ -5\alpha & \frac{\alpha\Delta}{\mu} - (\delta + \mu + \phi) \end{bmatrix}. \end{gathered} \tag{2}$$

[1]whendelly@alunos.utfpr.edu.br
[2]valentino@utfpr.edu.br

$$h_1 = h_{121} * h_{211}, \quad h_2 = h_{121} * h_{212}, \quad h_3 = h_{122} * h_{212}, \quad h_4 = h_{122} * h_{211},$$

em que,

$$h_{121} = \frac{\frac{-\alpha\Delta}{\mu} + \beta - \alpha y_1 - \left(-\frac{\alpha\Delta}{\mu} + \beta + 5\alpha\right)}{10\alpha} \text{ } e \text{ } h_{122} = 1 - h_{121},$$

$$h_{211} = \frac{\alpha y_2 + 5\alpha}{10\alpha} \text{ } e \text{ } h_{212} = 1 - h_{211}.$$

O Teorema abaixo, o qual é demonstrado em [2], é explorado com finalidade de analisar a estabilidade da modelagem T-S fuzzy do sistema SIS apresentada anteriormente

Teorema 2.1. *Considere o sistema não linear $\dot{y}(t) = f(y)$, o qual é representado exatamente em Z pela modelagem T-S fuzzy $\dot{y}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))A_i y(t)$. Se existir uma matriz simétrica $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, satisfazendo as seguintes LMIs*

$$P > 0, \tag{3}$$

$$A_i^T P + PA_i < 0, \quad \forall\, i = \{1, 2, \ldots, r\} \tag{4}$$

em que r é o numero de regras do modelo. Então, para todo $y_0 \in \Omega_\ell$ a origem será assintóticamente estável, sendo Ω_ℓ um conjunto de nível da função V contido em Z.

Resolvendo as LMIs (3) e (4) para as matrizes dos modelos locais (2) com os parâmetros $\Delta = 0.1, \alpha = 0.005, \beta = 0.1, \mu = 0.05, \phi = 0.05$, é obtida a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 3.1700 & 0.9265 \\ 0.9265 & 2.4719 \end{bmatrix}.$$

Portanto, pelo Teorema 2.1, a origem do sistema SIS T-S fuzzy é assintoticamente estável.

3 Conclusões

Nesse trabalho foi apresentado a modelagem T-S fuzzy do modelo SIS e analisada a estabilidade do ponto de equilíbrio, apenas verificando com auxílio do MATLAB, se um conjunto de LMIs é factível. Futuramente, pretende-se explorar o Princípio de Invariância, com o objetivo de obter LMIs menos conservadoras.

Referências

[1] M. H. R. Luiz, Modelos Matemáticos em epidemologia, Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática Universitária, Unesp, Rio Claro, (2012).

[2] K. Tanaka, H. Wang. *Fuzzy control systems design and analysis: A linear matrix inequality approach.* New York: John Wiley and Sons, 2001.

[3] T. Taniguchi, K. Tanaka, H. Ohatake e H. O. Wang. Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, volume 9, 525–537, 2001. DOI: 10.1109/91.940966.