Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Problema de Bifurcação com Grupo de Simetria e o Equivariant Branching-Lemma

Rosangela Teixeira Guedes[1]
Instituto de Matemática e Estatística, USP, São Paulo, SP

1 Introdução

Este trabalho descreve a estrutura de bifurcação de soluções de estado estacionário para sistemas ODE's:

$$\frac{dx}{dt} = g(x, \lambda) \tag{1}$$

em que $g : \Re^n \, \mathrm{x} \, \Re \to \Re^n$ comuta com a ação de um grupo de Lie compacto Γ em $V = \Re^n$. O resultado principal é o Equivariant Branching-Lemma e a prova deste lema é que subgrupos de Isotropia com subespaços de ponto fixo unidimensional conduz a solução de problemas de bifurcação com simetria.

2 Bifurcação e o Equivariant Branching-Lemma

Um germe $g \in \overrightarrow{\varepsilon}_{x,\lambda}(\Gamma)$ é uma aplicação Γ-Equivariante, que denotamos por g em que $g : V \, \mathrm{x} \, \Re \to V$ satisfaz $g(\gamma x, x) = \gamma g(x, x), \forall \gamma \in \Gamma$.

Seja Γ um grupo de Lie agindo no espaço vetorial V, um problema de bifurcação com grupo de simetria Γ é um germe $g \in \overrightarrow{\varepsilon}_{x,\lambda}(\Gamma)$ satisfaz $g(0, 0) = 0$ e $(\mathrm{dg})_{0,0} = 0$ em que dg é a matriz Jacobiana $n \, \mathrm{x} \, n$ obtida pela diferenciação de g em V-direções e n=dim V. Como o resultado faz uso das derivadas de g assumimos que esta função é infinitamente diferenciável.

Se $(\mathrm{dg})_{0,0}$ é diferente de zero então podemos usar a Redução de Liapunov-Schmidt com simetria para reduzir g do caso onde a jacoliana é nula. Este processo vai mudar n para um menor valor $n^{'}$ e também irá alterar a representação de Γ. No entanto, assumimos que essa redução já foi realizada e, por, conseguinte assumimos que $(\mathrm{dg})_{0,0} = 0$.

Equivariant Branching-Lemma: Sejam Γ um grupo de Lie agindo absolutamente irredutível em V e $g \in \overrightarrow{\varepsilon}_{x,\lambda}(\Gamma)$ um problema de bifurcação Γ-equivariante e $c^{'} \neq 0$ em que

[1]rtguedes@ime.usp.br

$(\mathrm{dg})_{0,\lambda} = c(\lambda)I$. Seja Σ um subgrupo de isotropia satisfazendo

$$dimFix(\Sigma) = 1. \tag{2}$$

Então existe um único ramo de soluções suave para g tal que o subgrupo de isotropia de cada solução é Σ.

Cicogna[1981] generaliza Equivariant Branching-Lemma para o caso em que dimFix(Σ) é ímpar. Na verdade, vamos provar um resultado mais geral que Equivariant Branching-Lemma, que segue:

Teorema: Seja Γ um grupo de Lie agindo em V. Suponha
a) $Fix(\Gamma) = 0$,
b) $\Sigma \subset \Gamma$ um subgrupo de isotropia satisfazendo (2),
c) $g : V \times \Re \to V$ é um problema bifurcação Γ-equivariante satisfazendo

$$(dg_\lambda)_{0,0}(v_0) \neq 0 \tag{3}$$

em que $v_0 \in Fix(\Sigma)$ é não-nulo. Então existe um ramo de soluções suave $(tv_0, \lambda(t))$ para a equação $g(t, \lambda) = 0$.
Prova: Temos que $g : Fix(\Sigma) \times \Re \to Fix(\Sigma)$, ou seja, o espaço fixo é invariante pela função g. Como $dimFix(\Sigma) = 1$ segue que $g(tv_0, \lambda) = h(t, \lambda)v_0$. Da hipótese $Fix(\Gamma) = \{0\}$ implica que g tem solução trivial. Como $h(0, \lambda) = 0$ aplicando o Teorema de Taylor para h, resulta em $g(tv_0, \lambda) = K(t, \lambda)tv_0$. Pela definição de problema de bifurcação com grupo de Simetria então $K(0, 0)v_0 = (dg)_{0,0}\ v_0 = 0$ e $K_\lambda(0, 0)v_0 = (dg_\lambda)_{0,0}(v_0) \neq 0$ por hipótese. Em seguida, aplicando o Teorema da Função Implícita para resolver $K(t, \lambda) = 0$ para $\lambda = \lambda(t)$, o que segue o resultado.

3 Conclusão

O Equivariant Branching-Lemma é um método para determinar soluções correspondentes a uma classe especial de subgrupos de isotropia máximais e o grupo de isotropia de uma solução de um sistema equivariante de EDO'S fornece informações sobre a forma da solução.

Referências

[1] P. Chossat and R. Lauterbach. Methods in Equivariant Bifurcation and Dynamical Systems, *Advanced series in nonlinear dynamics*, volume 15, World, 2000.

[2] G. Cicogna. Symmetry breakdown from bifurcations, *Lettere al Nuovo Cimento*, 31:600-602, 1981.

[3] M. Golubitsky. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, vol I and vol II. Springer-Verlag,Harper-Row, New York, 1985.

[4] A. Vanderbauwhede. *Local bifurcation an symmetry.* Pitman: Boston, 1982.