Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Estimativas da norma do sup de soluções limitadas de equações de difusão não lineares

Valéria C. Brum [1]
Departamento de Matemática, UFSM, Santa Maria, RS
Paulo Ricardo de Ávila Zingano[2]
Departamento de Matematica Pura e Aplicada, UFRGS, Porto Alegre, RS

Vamos desenvolver algumas estimativas para o valor da norma do sup $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ de soluções fracas limitadas para equações de difusões da forma

$$u_t = |u|^\alpha \Delta u + b(x,t)|u|^\lambda |\nabla u|^2, \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0,$$

onde $\alpha > 1$, $\lambda \geq \alpha - 1$ são constantes, $b(x,t)$ limitado, e o valor inicial $u(\cdot,0) \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ para algum $0 < p_0 < \infty$. Argumentos de comparação e estimativas de energia são usados para mostrar que

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \;\leq\; K \cdot \| u(\cdot,0) \|_{L^\kappa(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2\kappa}{2\kappa + n\alpha}} \; t^{-\frac{n}{2\kappa+n\alpha}}$$

para todo $t > 0$, onde $\kappa = \max\{\, p_0,\, 1-\alpha+B \,\}$, $B = \| b \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)}$ e $K > 0$ é uma constante que depende apenas de n, p_0, α, B.

Palavras-chave: Equações de difusão, soluções fracas, estimativas de energia, teorema da comparação.

1 Introdução

Neste trabalho nós desenvolvemos algumas estimativas para o valor da norma do sup $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ de soluções limitadas de problemas de valor inicial de parabólico da forma

$$u_t = |u|^\alpha \Delta u, + b(x,t)|u|^\lambda |\nabla u|^2 \quad u(\cdot,0) \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n), \tag{1}$$

para $0 < p_0 < \infty$ e onde $\alpha > 1$, $\lambda \geq \alpha - 1$ são constantes dadas, $b \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$.[3]

Tais problemas incluem casos particulares de inúmeros modelos importantes em Física e Biologia, ver [4, 9, 10]. Como a equação (1) deixa de ser parabólica quando $u = 0$, não podemos garantir a existência de solução clássica, somente a existência de soluções no sentido fraco. Aqui, dado $0 < T_* \leq \infty$, uma função mensurável $u = u(x,t)$ é dita solução

[1] valeriacardosobrum@gmail.com
[2] zingano@gmail.com
[3] Os casos em que $\alpha = 1$, $\lambda \geq 0$ foram discutidos em [6].

fraca do problema (1) no intervalo de tempo $[0, T_*)$ se $u \in L^\infty(S_T)$ para cada conjunto $S_T \equiv \mathbb{R}^n \times [0, T]$, $0 < T < T_*$, e $u(\cdot, t) \in L^2_{loc}\big([0, T_*), H^1_{loc}(\mathbb{R}^n)\big)$ com

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\!\!\int_{\mathbb{R}^n} u\varphi_t \, dx\, dt \;+\; \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x)\varphi(x,0)\, dx = &\alpha \int_0^\infty\!\!\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\alpha-1}(sgn\, u)|\nabla u|^2\varphi\, dx\, dt \\ &+ \int_0^\infty\!\!\int_{\mathbb{R}^n} |u|^\alpha \langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle\, dx\, dt - \int_0^\infty\!\!\int_{\mathbb{R}^n} b(x,t)|u|^\lambda |\nabla u|^2 \varphi\, dx\, dt\end{aligned}$$

para toda função teste $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n \times [0, T_*))$ com suporte compacto em $\mathbb{R}^n \times [0, T_*)$.

A existência de soluções fracas pode ser obtida por vários métodos ver [3, 8]. Segue do Teorema (2.1) e (2.3) que elas satisfazem o princípio do máximo.

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall t \in [0, T_*). \tag{2}$$

Em particular, soluções do problema (1) são globalmente definidas (i.e., $T_* = \infty$), com $\| u(\cdot, t) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ monotonicamente decrescente em $[\,0, \infty)$. Quanto a unicidade, segue dos resultados em [3, 9] que mesmo as soluções não negativas do problema (1) podem não ser unicamente definidas. Em todo o caso, todas as soluções do problema (1) devem satisfazer a estimativa fundamental

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le K \cdot \| u(\cdot, 0) \|_{L^\kappa(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2\kappa}{2\kappa + n\alpha}} \; t^{-\frac{n}{2\kappa + n\alpha}}$$

para todo $t > 0$, onde $\kappa = \max\big\{p_0, 1 - \alpha + B\big\}$, $\mathrm{B} = \|b|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)}$ e $K > 0$ denotando alguma constante que depende somente de n, p_0, α, B.

2 Análise do caso $\boldsymbol{\lambda = \alpha - 1}$

O argumento principal deste trabalho é baseado no fato fundamental de que $|u(x, t)|$ pode ser limitada por soluções clássicas limitadas e positivas do problema (1) que são muito mais fáceis de serem estudadas. Nós chamamos de soluções clássicas do problema (1)uma solução suave, limitada (C^2 em x, C^1 em t) e que satisfaz a equação no sentido clássico para $t > 0$ e a condição inicial em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ com $t \searrow 0$. Para provar isto, vamos primeiramente considerar o caso de soluções não negativas e limitadas $u(\cdot, t) \in L^\infty_{loc}([0, \infty[, L^\infty(\mathbb{R}^n)) \cap L^2_{loc}([0, \infty[, H^1_{loc}(\mathbb{R}^n))$ do problema (1). Soluções clássicas naturais associadas a $u(\cdot, t)$ podem ser introduzidas da seguinte forma: escolhendo uma função positiva $v \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C^0(\mathbb{R}^n)$, $tv \ge c|x|^{-\sigma}, c > 0, \sigma > 0$ e $|x| \gg 1$, tomando $\epsilon > 0$ e seja $u^\epsilon(\cdot, t)$a unica solução clássica positiva do problema

$$u^\epsilon_t = |u^\epsilon|^\alpha \Delta u^\epsilon + B \cdot |u^\epsilon|^{\alpha - 1}|\nabla u^\epsilon|^2, \qquad u^\epsilon(\cdot, 0) = u_0 + \epsilon v \qquad (u_0 \ge 0) \tag{3}$$

onde $\alpha > 1$ é uma constante dada e $B \in \mathbb{R}$ é escolhida de forma que $b(x, t) \le B$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$. As principais estimativas de $u^\epsilon(\cdot, t)$ são dadas pelos **Teoremas** 2.1 **e** 2.2 dados a seguir.

Teorema 2.1. *(Princípio do Máximo) Para cada $\epsilon > 0$, existe uma única solução clássica positiva $u^\epsilon(\cdot,t)$ de (3), definida para todo $t > 0$. Além disso, para todo $q \geq \max\{p_0, 1-\alpha+B\}$, onde $B = \|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+)}$ tem-se*

$$\|u^\epsilon(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|u^\epsilon(\cdot,0)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall t > 0. \tag{4}$$

Prova: A existência local, unicidade e positividade vem da teoria clássica de equações parabólicas, com existência global mostrada em [8]. Agora, dado $q \geq \max\{p_0, 1-\alpha+B\}$ finito, seja $\zeta_R \in C^2(\mathbb{R})$ satisfazendo $\zeta_R(x) = e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} - e^{-\varepsilon\sqrt{1+R^2}}$ se $|x| \leq R$, $\zeta_R(x) = 0$ se $|x| > R$.
Multiplicando (3) por $q\, u^\epsilon(x,t)^{q-1}\zeta_R(x)$, integrando em $\mathbb{R}^n \times [t_0, t]$, fazendo $t_0 \to 0$ e $R \to \infty$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^\epsilon(x,t)^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} u_0^\epsilon(x)^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx + M(T)^\alpha n\varepsilon \int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} u^\epsilon(x,\tau)^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau,$$

onde $M(T)$ satisfaz $\|u^\epsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq M(T) \quad \forall\ t_0 < t < T$. Assim, pelo Lema de Gronwall

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^\epsilon(x,t)^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}}\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} u_0^\epsilon(x)^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}}\, dx e^{M(T)^\alpha n\epsilon} \ \ \forall\ t > 0.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ e $q \to \infty$, obtemos $\|u^\epsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0^\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$. □

Teorema 2.2. *Para cada $\epsilon > 0$, temos*

$$\|u^\epsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K \cdot \|u^\epsilon(\cdot,0)\|_{L^\kappa(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2\kappa}{2\kappa+n\alpha}} t^{-\frac{n}{2\kappa+n\alpha}} \tag{5}$$

para todo $t > 0$, onde $K > 0$ é uma constante que depende somente de n, p_0, α, B , $\kappa = \max\{p_0, 1-\alpha+B\}$, $u^\epsilon(\cdot,0) = u_0 + \epsilon w \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $u^\epsilon(\cdot,t)$ denota uma solução clássica positiva do problema (3).

Prova: Vamos supor primeiramente que $p_0 \geq 1-\alpha+\gamma$. Seja $q \geq p_0$ finito, tomando $\mu = \frac{(n+2)q+2n\alpha}{2q+2n\alpha}$ e multiplicando(3) por $(t-t_0)^\mu q u^\epsilon(x,t)^{q-1}\zeta_R(x)$, onde $\zeta_R(x) = \zeta(x/R)$ é a função de corte introduzida na prova do Teorema (2.1), integrando em $\mathbb{R}^n \times [t_0, t]$, fazendo $R \to \infty$ e introduzindo $w(x,t) = u^\varepsilon(x,t)^{\frac{q+\alpha}{2}}$, obtemos

$$\begin{aligned}(t-t_0)^\mu \|w(\cdot,t)\|_{L^\beta(\mathbb{R}^n)}^\beta \ &+\ \frac{4q\,(q-\Gamma)}{(q+\alpha)^2}\int_{t_0}^t (\tau-t_0)^\mu \|\nabla w(\cdot,\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2\, d\tau \\ &\leq\ \mu\int_{t_0}^t (\tau-t_0)^{\mu-1}\|w(.,\tau)\|_{L^\beta(\mathbb{R}^n)}^\beta\, d\tau,\end{aligned} \tag{6}$$

onde $\beta = \frac{2q}{q+\alpha} \in (1,2)$. Agora nós recaimos na desigualdade

$$\|\mathrm{v}\|_{L^\beta(\mathbb{R}^n)} \leq K(\beta_0,\beta)\,\|\mathrm{v}\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}^{1-\theta}\|\nabla \mathrm{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^\theta, \tag{7}$$

onde $\beta_0 \in (0,\beta)$, $\theta \in (0,1)$ é dado por $\theta = \frac{\frac{1}{\beta_0}-\frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\beta_0}+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}}$ para um v $\in L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n) \cap H^1(\mathbb{R}^n)$, $1 < \beta < 2$. Usando a desigualdade de Hölder e o princípio do máximo, obtemos

$$\mu \int_{t_0}^{t} (t-t_0)^{\mu-1} \|w(.,\tau)\|^{\beta}_{L^{\beta}(\mathbb{R}^n)} d\tau \leq \mu \mathbb{K}^{\beta} \|w(.,t_0)\|^{\beta\cdot(1-\theta)}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)} (t-t_0)^{1-\frac{\beta\theta}{2}}$$

$$\left(\int_{t_0}^{t} (\tau - t_0)^{\mu} \|\nabla w(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \, d\tau \right)^{\frac{\beta\theta}{2}}, \text{ onde } \mathbb{K} = \sup_{q<\beta_0<\beta<2} K(\beta,\beta_0,n).$$

Tomando $E(t) = (t-t_0)^{\mu} \|w(\cdot,t)\|^{\beta}_{L^{\beta}(\mathbb{R}^n)} + \frac{4q\,(q-\Gamma)}{(q+\alpha)^2} \int_{t_0}^{t} (\tau-t_0)^{\mu} \|\nabla w\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} d\tau$, e substituindo em (6), obtemos

$$\|w(\cdot,t)\|^{\beta}_{L^{\beta}(\mathbb{R}^n)} \leq \mu^{\mu}\, \mathbb{K}^{\beta\cdot\mu} \|w(.,t_0)\|^{\beta\cdot(1-\theta)\cdot\mu}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)} (t-t_0)^{-(\mu-1)} \left(\frac{(q+\alpha)^2}{4q\,(q-\Gamma)} \right)^{\frac{\beta\theta}{2}\cdot\mu}.$$

Então

$$\|u^{\varepsilon}(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq A(q)^{\frac{1}{q}} \, \|u^{\varepsilon}(.,t_0)\|^{\frac{2q+n\alpha}{2(q+n\alpha)}}_{L^{\frac{q}{2}}(\mathbb{R}^n)} \, (t-t_0)^{-\frac{n}{2q+n\alpha}}, \tag{8}$$

onde $A(q) = \left(\frac{(n+2)q+2n\alpha}{2q+2n\alpha}\right)^{\frac{(n+2)q+2n\alpha}{2q+2n\alpha}} \cdot \mathbb{K}^{\frac{q}{q+\alpha}\cdot\frac{(n+2)q+2n\alpha}{q+n\alpha}} \cdot \left(\frac{(q+\alpha)^2}{4q\,(q-\Gamma)}\right)^{\frac{nq}{22q+2n\alpha}}$.

Agora, usando uma iteração do tipo Moser, obtemos

$$\|u^{\varepsilon}(\cdot,t)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq K(p_0,\alpha,n) \| \, u_0^{\varepsilon}\|^{\frac{2p_0}{2p_0+n\alpha}}_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)} \, t^{-\frac{n}{2p_0+n\alpha}}, \tag{9}$$

onde $K(p_0,\alpha,n) = \left[\prod_{j=1}^{n} A(2^j p_0)^{\frac{1}{2p_0+\frac{n\alpha}{2}}} \right] \cdot 2^{\frac{n}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{j 2^j p_0}{(2^j p_0 + n\alpha)(2^j p_0 + \frac{n\alpha}{2})}}$ □

Para provar este resultado tomamos $t > 0$. Seja $0 < t_0^{(k)} < t_1^{(k)} < \ldots < t_{k-1}^{(k)} < t_k^{(k)}$, onde $t_k^{(k)} = t, t_{k-1}^{(k)} = t_k^{(k)} - \theta_k^{(k)}.t, \ldots, t_0^{(k)} = t_1^{(k)} - \theta_1^{(k)}.t$ e $\theta_1^{(k)}, \theta_2^{(k)}, \ldots, \theta_k^{(k)} > 0$, satisfazendo $\sum_{j=1}^{k} \theta_j^{(k)} \leq 1$ e $\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \theta_j^{(k)} = 1$. Tomando $\theta_j^{(k)} = 2^{-j}; 1 \leq j \leq k$, aplicando a desigualdade (8) sucessivamente para $q = 2^k p_0,\ t_0 = t_{k-1}^{(k)},\quad q = 2^{k-1} p_0,\ t_0 = t_{k-2}^{(k)}, \ldots$ e fazendo $k \to \infty$, obtemos estimativa (9). Isto mostra (5) neste caso. Finalmente, nós observamos que o caso em que $p_0 < 1-\alpha+B$ segue de (5), basta considerar p_0 como sendo $p_0 := 1-\alpha+B$. A ligação entre $u^{\epsilon}(\cdot,t)$ e $u(\cdot,t)$ é dada pelo seguinte resultado

Teorema 2.3. *Seja $\lambda = \alpha - 1$ e $u(\cdot,t)$ uma solução não negativa e limitada do problema (1) com valor inicial $u_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, $u_0 \geq 0$, e seja $u^{\epsilon}(\cdot,t)$ solução classica positiva de (3), onde $B \in \mathbb{R}$ é tal que $b(x,t) \leq B$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$. Então temos (redefinindo $u(\cdot,t)$ em um conjunto de medida zero em t se necessário), $u(x,t) \leq u^{\epsilon}(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^n$.*

Prova: Este Teorema pode ser provado exatamente como a Proposição 2.2 em [4] (ver [4], páginas 590−592), onde as funções testes $\psi(x,t)$, $\psi_\epsilon(x,t)$ usadas em [4] são aqui definidas por:
$\psi(x,t) = H_\delta(P(u(x,t)) - P(u^\epsilon(x,t))) \cdot u(x,t)^{B-\alpha} \cdot \zeta(x)$ e
$\psi_\epsilon(x,t)= H_\delta(P(u(x,t)) - P(u^\epsilon(x,t))) \cdot u^\epsilon(x,t)^{B-\alpha} \cdot \zeta(x)$,
$\zeta(x) = \exp\{\sqrt{1+x^2}\} - \exp\{\sqrt{1+R^2}\}$ se $|x| \leq R$, $\zeta(x) = 0$ se $|x| > R$. □

Uma consequência imediata deste Teorema é que para cada $t > 0$,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K \cdot \|u_0 + \epsilon v\|_{L^\kappa(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2\kappa}{2\kappa+n\alpha}} t^{-\frac{1}{2\kappa+n\alpha}} \tag{10}$$

para todo $\epsilon > 0$, onde $\kappa = \max\{p_0, 1-\alpha+B\}$. Visto que $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|u^\epsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, fazendo $\epsilon \to 0$ em (10) obtemos o seguinte resultado.

Teorema 2.4. *Seja $\lambda = \alpha - 1$ e $u(\cdot,t)$ solução limitada do problema (1), então*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot,t_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall t > t_0 \geq 0$$

e

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K \cdot \| u_0 \|_{L^\kappa(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2\kappa}{2\kappa+n\alpha}} \; t^{-\frac{1}{2\kappa+n\alpha}} \qquad \forall\ t > 0,$$

onde $\kappa = \max\{p_0, 1-\alpha+B\}$, $B = \sup\{b(x,t)\colon x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0\}$.

Para finalizar, seja $u^\epsilon(\cdot,t)$ solução do problema

$$u_t^\epsilon = |u^\epsilon|^\alpha \Delta u^\epsilon + \Gamma \cdot |u^\epsilon|^{\alpha-1} |\nabla u^\epsilon|^2 \qquad u^\epsilon(\cdot,0) = |u_0| + \epsilon v, \tag{11}$$

onde $\Gamma = \| b \|_{L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)}$ e v uma função continua positiva arbitrária $v \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C^0(\mathbb{R}^n)$. Usando o mesmo argumento do Teorema 2.3 temos que $u(x,t) \leq u^\epsilon(x,t)$ e $-u(x,t) \leq u^\epsilon(x,t)$. Assim , $|u(x,t)| \leq u^\epsilon(x,t)$
Como os Teoremas 2.1 e 2.2 são válidos para $u^\epsilon(\cdot,t)$, com B substituido por Γ, obtemos

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \| \, |u_0| + \epsilon v \,\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall\ t > 0 \tag{12}$$

e

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K \cdot \| \, |u_0| + \epsilon v \|_{L^\kappa(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2\kappa}{2\kappa+n\alpha}} \; t^{-\frac{1}{2\kappa+n\alpha}} \tag{13}$$

para todo $t > 0$,onde $\kappa = \max\{p_0, 1-\alpha+\Gamma\}$. Fazendo $\epsilon \to 0$, obtemos o principal resultado desta seção.

Teorema 2.5. *Seja $\lambda = \alpha-1$ e $u(\cdot,t)$ solução arbitrária limitada do problema (1). Então, redefinindo $u(\cdot,t)$ em um conjunto de medida zero se necessário, temos que*

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \| u(\cdot,t_0) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall\ t > t_0 \geq 0$$

e

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq K \cdot \| u_0 \|_{L^\kappa(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2\kappa}{2\kappa+n\alpha}} \; t^{-\frac{1}{2\kappa+n\alpha}} \qquad \forall\ t > 0,$$

onde $\kappa = \max\{p_0, 1-\alpha+\Gamma\}\}$, $\Gamma = \| b \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+)}$.

3 Análise do caso $\lambda > \alpha - 1$

Nesta seção continuamos a análise do problema de valor inicial (1) considerando o caso em que $\lambda > \alpha - 1$. Usando argumentos similares aos usados na seção anterior, é possível provar que os **Teoremas** 2.1**,** 2.2 **e** 2.3 são válidos para este caso. Desta forma o seguinte resultado é obtido

Teorema 3.1. *Seja* $\lambda > \alpha - 1$ *e* $u(\cdot, t)$ *solução arbitrária limitada do problema* (1)*. Então, redefinindo* $u(\cdot, t)$ *em um conjunto de medida zero se necessário , obtemos*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot,t_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall\ t > t_0 \geq 0$$

e

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K \cdot \|u_0\|_{L^\kappa(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2\kappa}{2\kappa+n\alpha}} t^{-\frac{1}{2\kappa+n\alpha}} \qquad \forall\ t > 0,$$

onde $\kappa = \max\{p_0, 1-\alpha+\Gamma\}$, $\Gamma = B \cdot \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{\lambda-\alpha+1}$, $B = \|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+)}$ *e* $K > 0$ *é uma constante que depende somente de* n*,* p_0*,* α*,* Γ*.*

Referências

[1] V. C. Brum, On some degenerate nonlinear diffusion problems and *a priori* estimates (in Portuguese), PhD Thesis, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brazil, 2011.

[2] M. Bertsch, R. Dal Passo and M. Ughi, Discontinuous viscosity solutions of a degenerate parabolic equation, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 320:779-798, 1990.

[3] M. Bertsch, R. Dal Passo and M. Ughi, Nonuniqueness of solutions of a degenerate parabolic equation, *Annali Mat. Pura Appl.*, 161:57-81, 1992.

[4] M. Bertsch and M. Ughi, Positivity properties of viscosity solutions of a degenerate parabolic equation, *Nonlinear Anal. TMA*, 14:571-592, 1990.

[5] P. Braz e Silva and P. R. Zingano, Some asymptotic properties for solutions of one-dimensional advection-diffusion equations with Cauchy data in $L^p(\mathbb{R})$, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 342:465-467, 2006.

[6] V. C. Brum, M. V. Ferreira and P. R. Zingano, Supnorm estimates for nonnegative bounded solutions of a one-dimensional degenerate diffusion equation not in divergence form, *Journal of Func. Operator Theory Appl.*, 3:191-210, 2011

[7] A. S. Kalashnikov, Some problems of the qualitative theory of nonlinear degenerate second-order parabolic equations, *Russ. Math. Surv.*, 62:169-222.

[8] O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov and N. N. Uralceva, Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type, American Mathematical Society, Providence, 1968.

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0021

[9] M. Ughi, A degenerate parabolic equation modelling the spread of an epidemic, *Annali Mat. Pura Appl.*, , 143:385-400, 1986.

[10] *J. L. Vázquez*, The Porous Medium Equation: Mathematical Theory, Clarendon Press, Oxford, 2007.

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0021