Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

p-Laplaciano evolutivo com um termo advectivo especial

Patrícia L. Guidolin[1]
Centro de Matemática da Universidade de Coimbra, CMUC, Coimbra, PT
Paulo R. A. Zingano[2]
Departamento de Matemática Aplicada, UFRGS, Porto Alegre, RS

Resumo. Neste trabalho, investigamos diversas propriedades de soluções limitadas de equações de difusão não linear com termos advectivos na forma conservativa, onde o mecanismo de difusão é dado pelo p - Laplaciano. O termo advectivo em estudo tem natureza dissipativa e como consequência as soluções são globalmente definidas e decaem a zero (em várias normas) quando $t \to \infty$. As taxas de decaimento obtidas neste caso, pela análise apresentada (uma variação do clássico método $L^p - L^q$) são optimais. Através de um processo iterativo tipo *bootstrap* é possível obter uma estimativa de decaimento para a norma do sup.

Palavras-chave. p - Laplaciano, termos advectivos, difusão não linear, estimativa de decaimento.

1 Introdução

Neste trabalho vamos investigar algumas propriedades básicas de soluções do problema de difusão não linear com termo advectivo

$$u_t + \operatorname{div}\big(f(x,t,u)\big) = \mu(t)\operatorname{div}\big(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\big) \tag{1}$$

correspondentes a dados iniciais

$$u(\cdot,0) = u_0 \;\in\; L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^n), \tag{2}$$

com constantes $p > 2$, $1 \leq p_0 < \infty$, e $\mu \;\in C^0\big([0,\infty)\big)$ uma função positiva, e a função $f \in C^0(\mathbb{R}^n \times [0,\infty) \times \mathbb{R})$ satisfazendo $f_{x_1}, ..., f_{x_n}, f_u \in C^0(\mathbb{R}^n \times [0,\infty) \times \mathbb{R})$ e a condição

$$\sum_{j=1}^{n} u \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x,t,u) \geq 0 \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0 \text{ e } u \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Nosso objetivo é encontrar uma estimativa a priori para a norma do sup das soluções de (1)-(2)-(3) e analisar o seu comportamento assintótico. As soluções exibem (enquanto

[1]pguidolin@mat.uc.pt
[2]paulo.zingano@ufrgs.br

existirem) várias propriedades conhecidas de problemas parabólicos em forma conservativa, como, por exemplo, decrescimento na norma L^1, conservação de massa, contração e propriedades de comparação. Nota-se que, mesmo na forma conservativa, a dependência da variável x no termo advectivo torna o problema mais complexo, tornando em princípio possível a ocorrência de *blow-up*. De fato, o problema (1)-(2) pode tornar-se muito complicado quando a condição (3) for violada, como indicaremos intuitivamente a seguir.

Considere, por exemplo, soluções $v(\cdot,t)$ não negativas do problema

$$\begin{cases} v_t + \operatorname{div}(b(x)v^{k+1}) = \operatorname{div}(|\nabla v|^{p-2}\nabla v) \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ e } t > 0, \\ v(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n). \end{cases} \tag{4}$$

Podemos reescrever a equação na forma

$$v_t + (k+1)\, v^k b(x) \cdot \nabla v = \operatorname{div}(|\nabla v|^{p-2}\nabla v) + \beta(x) v^{k+1} \tag{5}$$

onde $\beta(x) := -\operatorname{div} b(x)$. Supondo que $\Omega \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : \beta(x) > 0\}$ seja não vazio, vê-se de (5) que $v(x,t)$ é estimulada a crescer nos pontos $x \in \Omega$, particularmente onde ocorrer $\beta(x) \gg 1$. Como (1) conserva massa, se $v(\cdot,t)$ crescer consideravelmente em alguma parte de Ω então o perfil de $v(\cdot,t)$ terá de afinar-se, tornando-se assim mais suscetível aos efeitos dissipativos do termo difusivo presente no lado direito de (4). O efeito final sobre a solução (explosão ou não em tempo finito, existência global, comportamento ao $t \to \infty$, etc) resultante dessa competição entre os termos do lado direito de (5) é difícil de ser previsto.

Para problemas (1)-(2)-(3) acima, é natural pensar com base na discussão anterior, que as soluções $u(\cdot,t)$ possam existir globalmente, já que a hipótese (3) torna o termo advectivo de natureza dissipativa ($\Omega \equiv \emptyset$ no exemplo acima), criando uma espectativa de obter controle sob as normas mais altas. E é nesta direção que vamos obter o resultado principal deste trabalho:

Teorema 1.1. *Se* $u(\cdot,t) \in C^0([0,\infty), L^{p_0}(\mathbb{R}^n)) \bigcap L^\infty([0,\infty), L^\infty(\mathbb{R}^n))$ *é solução do problema* (1)-(2)-(3)*, então*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n,p,p_0)(t)^{-\frac{n}{n(p-2)+p_0 p}} \|u_0\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p_0 p}{n(p-2)+p_0 p}}. \tag{6}$$

A prova deste teorema é baseada numa variação do método $L^p - L^q$, método utilizado em muitos trabalhos [1,2,8,11] com a finalidade de obter o controle da norma L^p pela norma L^q, onde $p > q$. A seguir, usando um processo iterativo (processo de *bootstrap*) e certa desigualdade de Sobolev-Nirenberg-Gagliardo [7] alcançamos o resultado. Estimativas do tipo (6) podem ser obtidas por vários métodos, como por exemplo, desigualdades de Sobolev logarítmicas, outras desigualdades de energia, técnicas de *Fourier splitting*, ver [3, 5, 8, 9]. Estas técnicas podem ser aplicadas mais geralmente (com maior ou menor dificuldade) para outras equações também.

2 Resultados Preliminares

Uma solução do problema (1)-(2)-(3) em $S_T \equiv \mathbb{R}^n \times (0,T)$ é uma função $u(\cdot,t) \in L^{\infty}_{loc}\big([0,T), L^{\infty}(\mathbb{R}^n)\big) \cap C^0\big([0,T), L^{p_0}_{loc}(\mathbb{R}^n)\big) \cap L^p_{loc}\big((0,T), W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)\big)$ satisfazendo, para cada $0 < t_1 < t_2 < T$ e $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$ compacto dados,

$$\int_{\mathbb{K}} u(x,t)\varphi(x,t)\,\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathbb{K}} \{-u\varphi_t - f(x,t,u)\nabla\varphi + |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi\}dxdt = 0 \tag{7}$$

para toda $\varphi \in H^1_{loc}\big((0,T), L^2(\mathbb{K})\big) \cap L^p_{loc}\big((0,T), W^{1,p}_0(\mathbb{K})\big)$ dada. Fazendo uso do método de escalas intrínsecas desenvolvido em [4, 10] e utilizando a regularização de Steklov [4], podemos estender os resultados obtidos em [6] e obter as seguintes proposições que serão usadas como referência futura.

Proposição 2.1. *Seja $u(\cdot,t)$ solução do proplema (1)-(2)-(3). Então vale que $u(\cdot,t) \in C^0([0,T_*), L^{p_0}(\mathbb{R}^n))$ e*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}, \tag{8}$$

para todo $p_0 \leq q \leq \infty$ e $t \in [0,T^*)$, onde $[0,T^*)$ é o intervalo maximal de existência da solução.

Como consequência, a solução $u(\cdot,t)$ está definida globalmente e suas normas decrescem. Além disso, como consequência direta da Proposição 2.1, temos $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ para todo $t > 0$.

O próximo resultado é uma desigualdade energia utilizada diretamente no processo $L^p - L^q$:

Proposição 2.2. *Seja $u(\cdot,t) \in L^\infty([0,\infty), L^\infty(\mathbb{R}^n)) \cap C^0([0,\infty), L^{p_0}(\mathbb{R}^n))$ solução do proplema (1)-(2)-(3). Então, para qualquer $q \geq \max\{2, p_0\}$ e $\gamma > 0$, obtemos*

$$\begin{aligned}
&(t-t_0)^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^q dx \\
&+ q(q-1)\int_{t_0}^t \mu(\tau)(\tau-t_0)^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p |u(x,\tau)|^{q-2} dxd\tau \\
&\leq \gamma \int_{t_0}^t (\tau-t_0)^{\gamma-1}\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,\tau)|^q dxd\tau.
\end{aligned} \tag{9}$$

As técnicas usadas para provar estes resultados podem ser encontras em [6].

3 Estimativa da norma L^∞

Nesta seção mostraremos como usar a desigualdade de energia dada na Proposição 2.2 para obter uma estimativa fundamental para norma do sup. Tal estimativa mostra que a solução $u(\cdot,t)$ (globalmente definida) decai ao $t \to \infty$ e além disso nos fornece a taxa de decaimento. Começaremos mostrando uma aproximação $L^q - L^p$.

Teorema 3.1. *Seja* $u(\cdot,t) \in C^0([0,\infty), L^{p_0}(\mathbb{R}^n)) \bigcap L^\infty([0,\infty), L^\infty(\mathbb{R}^n))$ *solução* (1)-(2)-(3)*. Então para cada* $q \geq 2p_0$ *temos*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq K(n,q,p,p_0)\|u(\cdot,t_0)\|^{\delta}_{L^{\frac{q}{2}}(\mathbb{R}^n)} \left(\int_{t_0}^{t} \mu(\tau)d\tau\right)^{-\gamma}$$

para $0 \leq t_0 < t < \infty$.

Demonstração. Sem perda de generaldade, podemos supor $\mu(\tau) = 1$ para todo $\tau \in (t_0, t)$, simplificando os cálculos futuros, e a partir de uma mudança de variável em t, $\tau := \displaystyle\int_0^t \mu(s)ds$, é possível voltar para a desigualdade desejada.

Com $\mu(\tau) = 1$, a desigualdade (9) acima obtida pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned}(t-t_0)^\gamma \|u(\cdot,t)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} + q(q-1)\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p |u|^{q-2} dx d\tau \\ \leq \gamma \int_{t_0}^{t} (\tau - t_0)^{\gamma-1} \|u(\cdot,\tau)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} d\tau. \end{aligned} \tag{10}$$

Definimos a seguinte função

$$w(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & q = 2 \\ |u(x,t)|^\lambda, & q > 2, \end{cases} \tag{11}$$

onde $\lambda = \dfrac{p+q-2}{p}$. Assim, obtemos as seguintes relações

$$\|u(\cdot,t)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^q dx = \int_{\mathbb{R}^n} |w(x,t)|^{\frac{q}{\lambda}} dx = \|w(\cdot,t)\|^\beta_{L^\beta(\mathbb{R}^n)},$$

onde $\beta := \dfrac{q}{\lambda}$ e

$$\|u(\cdot,t)\|^{\frac{q}{2}}_{L^{\frac{q}{2}}(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^{\frac{q}{2}} dx = \int_{\mathbb{R}^n} |w(x,t)|^{\frac{q}{2\lambda}} dx = \|w(\cdot,t)\|^{\beta_0}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)},$$

onde $\beta_0 := \dfrac{\beta}{2}$.

Reescrevendo (10) em função de $w(\cdot,t)$,

$$\begin{aligned}(t-t_0)^\gamma \|w(\cdot,t)\|^\beta_{L^\beta(\mathbb{R}^n)} + \frac{q(q-1)}{\lambda^p}\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla w(x,\tau)|^p dx d\tau \\ \leq \gamma \underbrace{\int_{t_0}^{t} (\tau - t_0)^{\gamma-1} \|w(\cdot,\tau)\|^\beta_{L^\beta(\mathbb{R}^n)} d\tau}_{(*)}. \end{aligned} \tag{12}$$

Agora usando em $(*)$ a desigualdade (SNG) (veja em [7]), temos

$$\|w(\cdot,\tau)\|_{L^\beta}^{\beta} \leq K(n)^\beta \|w(\cdot,\tau)\|_{L^{\beta_0}}^{(1-\theta)\beta} \|\nabla w(\cdot,\tau)\|_{L^p}^{\theta\beta} \tag{13}$$

onde $0 < \beta_0 < \beta$, $K := K(n)$ e θ satisfaz

$$\frac{1}{\beta} = \theta\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right) + \frac{2}{\beta}(1-\theta), \tag{14}$$

e ainda, estimamos $(*)$, usando a propriedade de decaimento das normas L^q dada pela Proposição 2.1, e a desigualdade de Hölder com parâmentros $\frac{p}{\theta\beta}$ e $\frac{p}{p-\theta\beta}$, a desigualdade (12) fica

$$\begin{aligned} &(t-t_0)^\gamma \|w(\cdot,t)\|_{L^\beta(\mathbb{R}^n)}^{\beta} + \frac{q(q-1)}{\lambda^p}\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^\gamma \|\nabla w\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{p} d\tau \\ &\leq \gamma (t-t_0)^{\frac{p-\theta\beta}{p}} K^\beta \|w(\cdot,t_0)\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}^{(1-\theta)\beta} A^{-\frac{\theta\beta}{p}} \left(A\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{(\gamma-1)\frac{p}{\theta\beta}} \|\nabla w\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{p} d\tau\right)^{\frac{\theta\beta}{p}}, \end{aligned} \tag{15}$$

onde A será determinado mais tarde. Neste momento, podemos escolher γ, de forma que $\gamma = (\gamma-1)\frac{p}{\theta\beta}$, isto é, $\gamma := \dfrac{p}{p-\theta\beta}$, permitindo que as integrais em (15) tornem-se semelhantes. Usando Desigualdade de Young com parâmetros $\frac{p}{\theta\beta}$ e $\frac{p}{p-\theta\beta}$, obtemos

$$\begin{aligned} &(t-t_0)^\gamma \|w(\cdot,t)\|_{L^\beta(\mathbb{R}^n)}^{\beta} + \frac{q(q-1)}{\lambda^p}\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^\gamma \|\nabla w\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{p} d\tau \\ &\leq \gamma\left[\frac{p-\theta\beta}{p}\left(A^{-\frac{\theta\beta}{p}}(t-t_0)^{\frac{p-\theta\beta}{p}} K^\beta \|w(\cdot,t_0)\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}^{(1-\theta)\beta}\right)^{\frac{p}{p-\theta\beta}}\right. \\ &\left. + \frac{\theta\beta}{p} A\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^\gamma \|\nabla w\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{p} d\tau\right] \\ &= (t-t_0) A^{-\frac{\theta\beta}{p-\theta\beta}} K^{\beta\gamma} \|w(\cdot,t_0)\|_{L^{\beta_0}}^{(1-\theta)\beta\gamma} \\ &+ \frac{\theta\beta}{p-\theta\beta} A\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^\gamma \|\nabla w\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{p} d\tau. \end{aligned} \tag{16}$$

Escolhendo A tal que $\dfrac{\theta\beta}{p-\theta\beta}A = \dfrac{q(q-1)}{\lambda^p}$, eliminamos o termo

$$\frac{q(q-1)}{\lambda^p}\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^\gamma \|\nabla w\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{p} d\tau,$$

e ficamos com

$$(t-t_0)^\gamma \|w(\cdot,t)\|_{L^\beta(\mathbb{R}^n)}^{\beta} \leq A^{\frac{-\theta\beta}{p-\theta\beta}} K^{\beta\gamma} (t-t_0) \|w(\cdot,t_0)\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}^{(1-\theta)\beta\gamma}.$$

Dividindo tudo por $(t-t_0)^\gamma$, obtemos

$$\|w(\cdot,t)\|^{\beta}_{L^{\beta}(\mathbb{R}^n)} \leq A^{\frac{-\theta\beta}{p-\theta\beta}} K^{\beta\gamma}(t-t_0)^{1-\gamma}\|w(\cdot,t_0)\|^{(1-\theta)\beta\gamma}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}. \tag{17}$$

Reescrevendo (17) em função de $u(\cdot,t)$, e calculando os expoentes em função de p, q e n, obtemos o resultado desejado.

□

Até o momento obtivemos a estimativa

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq A^{-\frac{n}{2n(p-2)+pq}} K^{\frac{p}{p+q-2}\left(1+\frac{qn}{2n(p-2)+pq}\right)}. \tag{18}$$
$$(t-t_0)^{-\frac{n}{2n(p-2)+pq}} \|u(\cdot,t_0)\|^{1-\frac{n(p-2)}{2n(p-2)+pq}}_{L^{\frac{q}{2}}(\mathbb{R}^n)},$$

onde a constante A é dada por $A := q(q-1)\dfrac{2n(p-2)+pq}{nq}\left(\dfrac{p}{p+q-2}\right)^p$ e a constante K é aquela que surge da desigualdade (13).

Agora, usando os resultados anteriores e um processo tipo *bootstrap*, com argumentos mais técnicos, chegamos ao nosso resultado principal:

Teorema 3.2. *Seja* $u(\cdot,t) \in C^0([0,\infty), L^{p_0}(\mathbb{R}^n)) \bigcap L^\infty([0,\infty), L^\infty(\mathbb{R}^n))$ *solução do problema* (1)-(2)-(3), *então*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n,p,p_0)(t)^{-\frac{n}{n(p-2)+p_0p}} \|u_0\|^{\frac{p_0p}{n(p-2)+p_0p}}_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)}.$$

Corolário 3.1. *Com as mesmas hipóteses do teorema anterior, temos*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \to 0 \text{ ao } t \to \infty,$$

para todo $q \geq 2p_0$.

Demonstração. Usando o Teorema 3.2 e a propriedade de decrescimento da norma L^q, para todo $q \geq 2p_0$, temos

$$\|u(\cdot,t)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |u(\cdot,t)|^{q-1}|u(\cdot,t)|dx \leq \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|u(\cdot,t)\|^{q-1}_{L^{q-1}(\mathbb{R}^n)} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

□

4 Conclusões

As soluções tratadas no problema (1)-(2)-(3) estão definidas globalmente e exibem decaimento assintótico, sendo determinada (de forma explicita) a taxa de decaimento da solução. Este problema, traz à tona questões sobre o comportamento da solução ao ser violada a hipótese (3). E ainda, considerando o problema com a hipótese (3), há questões de interesse não respondidas, como por exemplo, a obtenção de aproximações assintóticas para $t^{\gamma}u(\cdot,t)$ ao $t \to \infty$, e (no caso $p_0 = 1$) sobre a validade ou não da propriedade

$$\lim_{t\to\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = |m|, \quad m = \int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)dx,$$

que é conhecida para equação do calor e outras equações mais simples, ver [11].

Agradecimentos

Agradecemos ao CMUC e ao IME-UFRGS pelo acolhimento e excelentes condições para o desenvolvimento da pesquisa em Matemática.

Referências

[1] N. D. Alikakos. L^p bounds of solutions of reaction-diffusion equations, *Comm. Partial Diff. Eqs.*, 4:827-868, 1979.

[2] P. Braz e Silva; L. Schutz; P.R. Zingano. On some energy inequalities and supnorm estimates for advection-diffusion equations in $\mathbb{R}^n$, *Nonlinear Anal. T.M.A*, 93:90-96, 2013.

[3] F. Cipriani; G. Grillo. Uniform bounds for solutions to quasilinear parabolic equation, *J.Diff.Eqs.*, 177:209-234, 2001.

[4] E. DiBenedetto. *Degenerate Parabolic Equations*. Springer-Verlag, New York, 1993. ISSN: 0172-5939.

[5] M. Escobedo; E. Zuazua. Large time behavior for convection-diffusion equations in $\mathbb{R}^n$, *J. Funct. Anal.*, 100:119-161, 1991.

[6] P.L. Guidolin. Contribuições para a teoria de equações do p-Laplaciano evolutivo com termos advectivos, Tese de Doutorado em Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil, 2015.

[7] L. Nirenberg. On elliptic partial diferential equations, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze*, 13:115-162, 1959.

[8] M. M. Porzio. On decay estimates, *J. Evol. Eqs.*, 9:561-591, 2009.

[9] M. E. Schonbek. Uniform decay rates for parabolic conservations laws, *Nonlinear Anal. T.M.A*, 10:943-956, 1986.

[10] J. M. Urbano. The Method of Intrinsic Scaling: a systematic approach to regularity for degenerate and singular, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer, New York, 2008. ISSN: 0075-8434.

[11] J. L. Vazquez. The Porous Medium Equation: mathematical theory, *Oxford Mathematical Monographs*, Oxford, 2007.

