

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

# A Evolução do Algoritmo Marching Cubes

Lis Custódio<sup>1</sup>

Departamento de Modelagem Computacional, Instituto Politécnico, UERJ, Rio de Janeiro, RJ  
Sinesio Pesco<sup>2</sup>

Departamento de Matemática, PUC - Rio, Rio de Janeiro, RJ

**Resumo.** O algoritmo Marching Cubes, é sem dúvida o mais popular entre os algoritmos de extração de isosuperfície, e uma importante ferramenta para muitos pesquisadores e especialistas em visualização. A adoção generalizada do Marching Cubes resultou em um grande número de melhorias em seu algoritmo ao longo dos anos. Neste trabalho apresentamos uma revisão sobre a evolução do algoritmo Marching Cubes, destacando as principais contribuições relacionadas à continuidade e coerência topológica da malha resultante.

**Palavras-chave.** Marching Cubes, Extratores de Isosuperfícies, coerência topológica.

## 1 Introdução

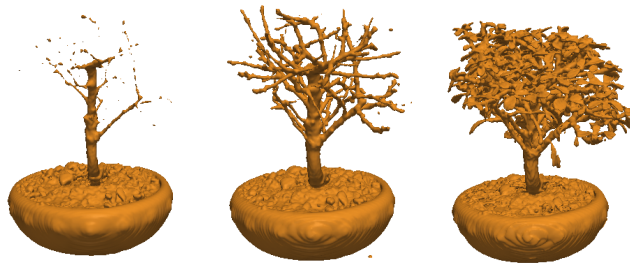


Figura 1: Malhas extraídas do dado Bonsai para os isovalores 130, 70 e 30.

Os algoritmos de extração de isosuperfícies são uma poderosa ferramenta na interpretação e visualização de dados volumétricos. O algoritmo Marching Cubes, originalmente proposto por Lorensen e Cline [6] em 1987, se destaca por sua simplicidade, robustez e velocidade.

As isosuperfícies desempenham um importante papel em áreas da ciência, como biologia, medicina, química e dinâmica computacional de fluidos. Dado um campo escalar  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  e um valor escalar  $\alpha$ , a isosuperfície  $S_\alpha$ , associada a  $\alpha$ , consiste no conjunto dos pontos  $x \in \mathbb{R}^3$  tais que  $f(x) = \alpha$ .

<sup>1</sup>lcustodio@iprj.uerj.br

<sup>2</sup>sinesio@puc-rio.br

$$S_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = \alpha\}. \quad (1)$$

No processo computacional de extração de isosuperfícies, o campo escalar  $f$  é amostrado sobre os vértices de uma grade retangular tridimensional e interpolado linearmente sobre as arestas, faces e interior das células desta grade. Desta forma, seja  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  a função que interpola o campo escalar  $f$  em de cada célula da grade:

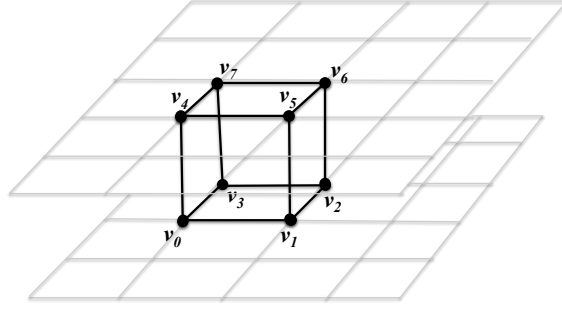


Figura 2: Ilustração de uma célula na grade.

$$\begin{aligned} g(x, y, z) = & (1-x)(1-y)(1-z)f(v_0) + (1-x)(1-y)zf(v_4) \\ & + (1-x)y(1-z)f(v_3) + (1-x)yzf(v_7) + x(1-y)(1-z)f(v_1) \\ & + x(1-y)zf(v_5) + xy(1-z)f(v_2) + xyzf(v_6), \end{aligned} \quad (2)$$

(onde consideramos, sem perda de generalidade, um cubo unitário), dado um valor escalar  $\lambda$ , busca-se construir, no interior de cada célula, um modelo tridimensional (geralmente constituído por uma malha triangular) que represente corretamente a geometria e a topologia da isosuperfície:

$$S_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid g(x) = \lambda\}. \quad (3)$$

Na Figura (1) apresentamos malhas extraídas do dado Bonsai, referentes aos isovalores 130, 70 e 30, utilizando a versão de Custodio *et al.* [2] do algoritmo *Marching Cubes*.

Os algoritmos de extração de isosuperfícies podem ser divididos em duas classes de acordo com as suas garantias topológicas: algoritmos topologicamente consistentes e algoritmos topologicamente coerentes. Os algoritmos topologicamente consistentes se comprometem apenas em gerar variedades lineares por parte (superfícies contínuas, livres de quebras) com exceção da fronteira do domínio. Enquanto que os algoritmos topologicamente coerentes produzem variedades lineares por parte, homeomorfas à superfície induzida pelo interpolante.

Nosso objetivo nas seções seguintes é descrever a evolução do *Marching Cubes* e os surpreendentes desafios encontrados em um algoritmo de interpolação trilinear que busque representar corretamente a topologia da isosuperfície de interesse. Na Seção 2 descrevemos o algoritmo *Marching Cubes* propriamente dito. Na Seção 3 apresentamos a evolução do *Marching Cubes* ao longo dos anos, na busca de se construir um algoritmo de extração de

isosuperfícies que mantivesse a simplicidade e robustez do algoritmo original e fosse capaz de representar corretamente a topologia do interpolante trilinear.

## 2 O Algoritmo Marching Cubes

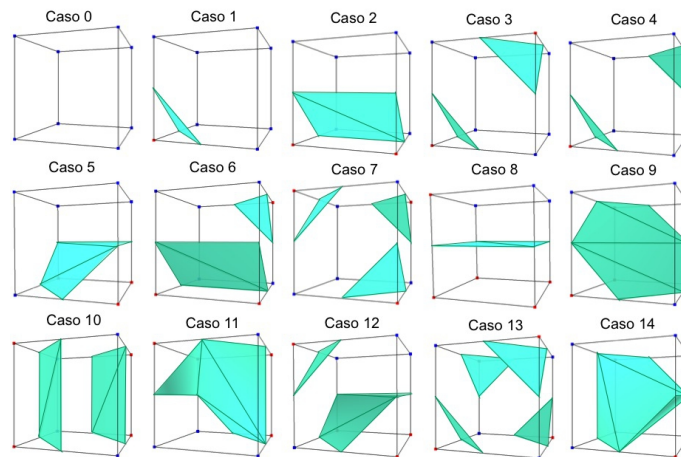


Figura 3: Tabela de triangulação proposta por Lorensen e Cline.

O algoritmo *Marching Cubes*, tem como dado de entrada uma grade retangular  $G$ , com um campo escalar amostrado sobre seus vértices ( $x_j \in G$ ), um interpolante trilinear por partes  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definido em  $G$  e um isovalor  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Definimos a isosuperfície  $S_\lambda$  como o conjunto dos pontos  $x \in \mathbb{R}^3$  tais que  $g(x) = \lambda$ . O *Marching Cubes*, em cada cubo  $c_i$  da grade  $G$ , determina como  $S_\lambda$  intersecta suas arestas e constrói uma triangulação que aproxima  $S_\lambda$  em seu interior. Desta forma o MC constrói uma malha linear por partes que aproxima a isosuperfície de interesse  $S_\lambda$ .

Consideremos agora um cubo  $c_i$  da grade  $G$ . Para determinar como é dada intersecção da isosuperfície com as arestas do cubo, classificamos primeiramente cada um de seus oito vértices  $v_j$  como positivo, se  $g(v_j) \geq \lambda$ , ou negativo se  $g(v_j) < \lambda$  (da mesma forma, dizemos que um ponto  $x \in c_i$  é positivo (negativo) se  $g(x) \geq \lambda$  ( $g(x) < \lambda$ )). As arestas intersectadas serão as arestas cujos vértices possuem sinais opostos, e os pontos de intersecção são determinados através da interpolação linear dos valores do campo escalar sobre seus vértices. Sem perda de generalidade, assumimos que  $\lambda = 0$  e, assim,  $S_\lambda = S_0 = S$ .

Visto que existem duas classificações (positivo e negativo), para cada um dos oito vértices de um cubo, existem  $2^8 = 256$  configurações possíveis de sinais sobre seus vértices e, conseqüentemente 256 formas da isosuperfície intersectar suas arestas. Essas 256 maneiras podem ser reduzidas para 14 se considerarmos as relações de simetria existentes em um cubo.

Na Figura 3 apresentamos a tabela de triangulação proposta por Lorensen e Cline [6] onde, para cada cubo, de acordo com a forma de intersecção da isosuperfície sobre suas arestas, é apresentada uma triangulação que supostamente aproximaria a isosuperfície em seu interior.

No entanto, a malha extraída pelo *Marching Cubes* apresentava descontinuidades e incoerências topológicas e, como veremos a seguir, logo após a sua publicação, a busca por uma técnica de extração de isosuperfície topologicamente correta começou.

### 3 Continuidade e Coerência Topológica da Malha Resultante

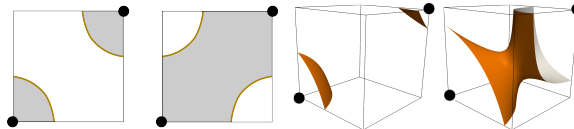


Figura 4: À direita: Ambiguidade sobre a face do cubo. À esquerda: ambiguidade interior presente no caso 4.

Dürst [3] foi o primeiro a apontar em 1988 que, para alguns casos do MC, existiam mais de uma triangulação possível. E que a tabela incompleta proposta por Lorensen e Cline, incapaz de representar corretamente todos os possíveis comportamentos do interpolante trilinear, nem sempre gerava superfícies contínuas e topologicamente coerentes. Como veremos a seguir, os problemas apontados por Dürst eram causados por ambiguidades no comportamento do interpolante trilinear sobre as faces e no interior do cubo. Uma face é considerada ambígua quando possui sinais alternados sobre seus vértices. Observe que com essa configuração de sinais não é possível determinar como unir corretamente os pontos de interseção sobre as arestas da face. De forma semelhante, uma ambiguidade interior ocorre quando os sinais dos vértices do cubo são insuficientes para determinar a triangulação correta em seu interior (Figura 4).

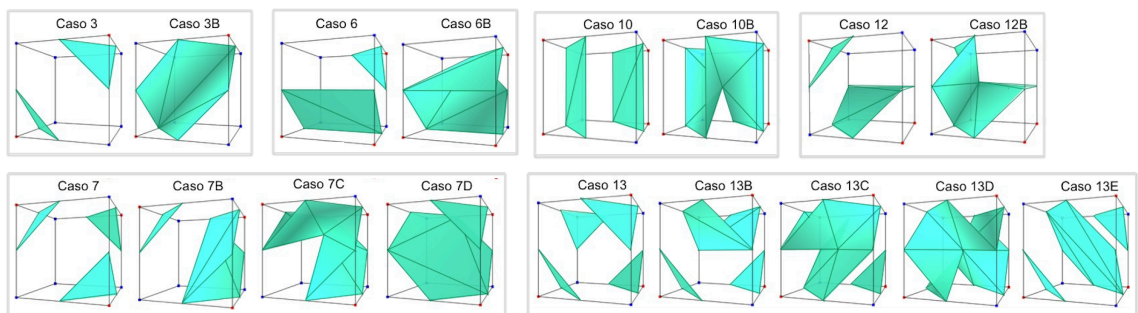


Figura 5: Triangulações adicionais propostas por Nielson e Hamann para resolver o problema de ambiguidade sobre as faces do cubo: subcasos 3, 6, 7, 10, 12 e 13 da tabela original. Em cada grupo, apresentamos à esquerda a triangulação proposta no trabalho original, e à direita as novas triangulações propostas.

Em 1991, Nielson e Hamann [10] chamam a atenção para a possibilidade de ambiguidades sobre as faces do cubo e, como apontado por Dürst, para a necessidade de adicionar novos casos à tabela de triangulação de MC. Para resolver tal problema os autores propõem

o *Asymptotic Decider*, uma solução simples e elegante que, dada uma face ambígua, determina a forma correta de unir suas arestas intersectadas. Em sua tabela de triangulação, os autores acrescentam 11 casos aos 14 casos apresentados no trabalho original. As triangulações acrescentadas consistem em subcasos para os casos 3, 6, 7, 10, 12 e 13, os quais apresentam o problema de ambiguidade sobre as faces do cubo (Figura 5). Os casos acrescentados por Nielson e Hamann foram suficientes para garantir a continuidade nas malhas geradas pelo algoritmo.

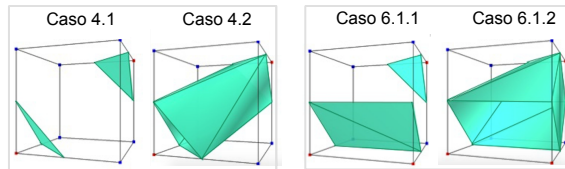


Figura 6: Triangulações adicionais, propostas por Natarajan, para os casos 4 e 6, para resolver o problema de ambiguidade no interior do cubo.

No entanto, os casos adicionados por Nielson e Hamann não foram suficientes para garantir a coerência topológica da malha gerada. Em 1994, Natarajan [8] observa que o problema de ambiguidade também pode ocorrer no interior do cubo, e que os casos 4 e 6 admitem triangulações adicionais, além das propostas por Nielson e Hamann [10] (veja Figura 3). Em seu trabalho, dada uma configuração ambígua (com ambiguidades sobre as faces ou no interior do cubo), o correto comportamento do interpolante trilinear é determinado através da comparação do valor do campo escalar sobre seus pontos críticos e sobre os vértices do cubo. Apesar de sua tabela de triangulação ainda ser incompleta, e incapaz de representar corretamente o comportamento do interpolante trilinear no interior do cubo, Natarajan foi o primeiro a considerar a possibilidade da existência de “túneis” (isosuperfície homeomorfa a um cilindro) no interior do cubo.

Em 1995 Chernyaev [1] propõe o algoritmo *Marching Cubes 33*, onde apresenta uma tabela de triangulação composta por 33 casos, dos quais apenas 32 são realmente geometricamente diferentes (veja Figura 7). Como provado posteriormente, em 2003 por Nielson [9], a tabela de triangulação proposta por Chernyaev é capaz de representar corretamente todos os possíveis comportamentos do interpolante trilinear no interior do cubo. Em seu trabalho, Chernyaev utiliza o *Asymptotic Decider* proposto por Nielson e Hamann para resolver o problema de ambiguidade sobre as faces, e propõe um novo teste para resolver o problema de ambiguidade no interior do cubo.

Em 1999 Matveyev [7] propõe um algoritmo, também baseado em uma tabela de triangulação que representa corretamente o comportamento do interpolante trilinear e usa as interseções da isosuperfície sobre as diagonais do cubo para determinar o comportamento do interpolante trilinear.

Em 2003, Lewiner *et al.* [4] propõem uma implementação do algoritmo proposto por Chernyaev, e Nielson, no trabalho *On Marching Cubes* [9] lista todos os possíveis comportamentos do interpolante trilinear no interior do cubo. Ainda em 2003, Lopes e Brodlie [5] estendem os testes propostos por Natarajan para todos os casos ambíguos do MC. No entanto, assim como no trabalho de Natarajan, o algoritmo proposto não considera a pos-

sibilidade de o caso 7 possuir dois pontos críticos no interior do cubo, o que resulta em incoerências topológicas na malha gerada.

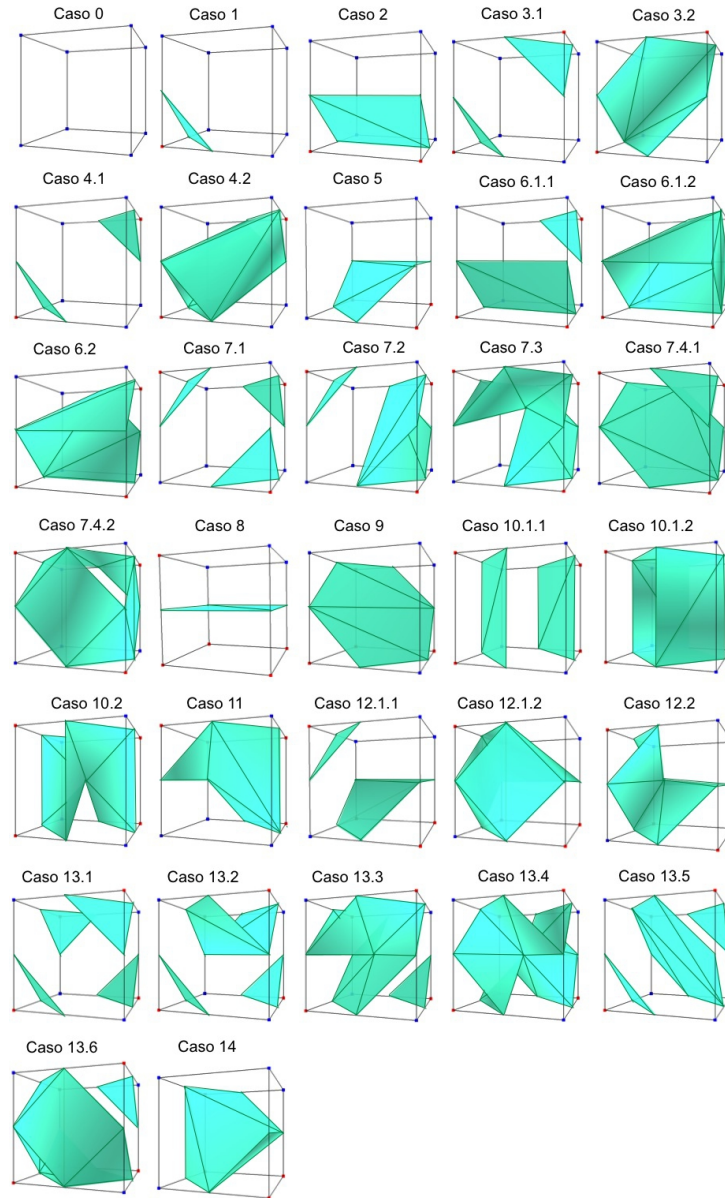


Figura 7: Tabela de triangulação proposta por Chernyaev.

Em 2013 Custodio *et al.* [2] chamam a atenção para a existência de erros no algoritmo *Marching Cubes 33*. Os autores observam que o teste interior proposto por Chernyaev [1] é incapaz de resolver corretamente a ambiguidade interior do caso 13. Neste mesmo trabalho, para solucionar o problema, os autores propõem uma implementação do algoritmo MC33 com um novo teste de ambiguidade interior.

## 4 Conclusão

Por a sua notória popularidade o algoritmo *Marching Cubes* tem recebido inúmeras melhorias ao longo dos anos. Neste trabalho apresentamos a evolução do algoritmo, abordando as principais contribuições dadas, sobre o ponto de vista da continuidade e coerência topológica da malha gerada.

## Referências

- [1] E. V. Chernyaev. *Marching Cubes 33: Construction of topologically correct isosurfaces*. Technical Report CN/95-17, Institute for High Energy Physics, 1995.
- [2] L. Custodio, T. Etienne, S. Pesco, and C. Silva. Practical considerations on marching cubes 33 topological correctness. *Computers and Graphics*, 37(7):840 – 850, 2013.
- [3] M. Dürst. Letters: additional reference to marching cubes. *Computer Graphics*, 1988.
- [4] T. Lewiner, H. Lopes, A. W. Vieira, and G. Tavares. Efficient implementation of Marching Cubes’ cases with topological guarantees. *Journal of Graphics Tools*, 8(2):1–15, 2003.
- [5] A. Lopes and K. Brodlie. Improving the robustness and accuracy of the Marching Cubes algorithm for isosurfacing. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 9(1):16–29, 2003.
- [6] W. Lorensen and H. Cline. Marching Cubes: A high resolution 3d surface construction algorithm. *SIGGRAPH Computer Graphics*, 21:163–169, 1987.
- [7] S. V. Matveyev. *Marching cubes: surface complexity measure*. Technical report, Institute for High Energy Physics, 1999.
- [8] B. K. Natarajan. On generating topologically consistent isosurfaces from uniform samples. *The Visual Computer*, 11(1):52–62, Jan. 1994.
- [9] G. M. Nielson. On marching cubes. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 9:283–297, 2003.
- [10] G. M. Nielson and B. Hamann. The asymptotic decider: resolving the ambiguity in marching cubes. In *Proceedings of the 2nd conference on Visualization*, pages 83–91, Los Alamitos, CA, USA, 1991. IEEE Computer Society Press.