

## Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

# Fronteira eficiente a partir da média, variância e assimetria

João Francisco Neves<sup>1</sup>

Mestrando em Ciências Computacionais, IME, UERJ, Rio de Janeiro, RJ

Patrícia Nunes da Silva<sup>2</sup>

Departamento de Análise Matemática, IME, UERJ, Rio de Janeiro, RJ

## 1 Introdução

Na moderna teoria de portfólio presume-se que todo o investidor apresenta aversão ao risco e busca o maior retorno possível em seus investimentos, dispondo apenas de um único período de investimento. Assume-se que os custos e impostos nas transações financeiras não existem e os valores mobiliários são indefinidamente divisíveis. O modelo de análise de portfólio baseado na média e variância proposto por Markowitz é construído sobre dois parâmetros, retorno da distribuição dos ativos financeiros nomeados de média do retorno e a variância/desvio padrão [2]. Tal modelo vem sendo amplamente investigado e criticado, devido a apenas o primeiro e o segundo momentos centrais serem utilizados na análise, sendo desconsiderados os momentos de alta ordem.

O objetivo deste trabalho é buscar uma solução para o problema de otimização e caracterizar a fronteira eficiente por meio dos parâmetros (média, variância e assimetria) da função utilidade.

## 2 Otimização do problema envolvendo média, variância e assimetria

Seja  $w$  a saúde do investimento,  $\bar{x}$  a renda do investidor, onde a função utilidade é determinada a partir da soma da saúde do investimento e da renda do investidor, segue que  $U = U(\bar{x} + w)$ . A taxa de retorno do investimento  $\bar{r}$  é determinado a partir da razão  $\bar{r} = \frac{\bar{x}}{w}$ . Seja o momento estimado pelo valor esperado,  $\mu = E(\bar{r}w + w)$ , expandindo a função  $U$  em série de Taylor em torno de  $\mu$  até a terceira derivada, calculando o valor esperado segue que,

$$E[U(X)] = U(\mu_1) + \frac{U''(\mu_1)}{2}\mu_2 + \frac{U'''(\mu_1)}{3!}\mu_3, \quad (1)$$

onde  $\mu_i$ , com  $i = 1, 2$  e  $3$ , representa os  $i$ -ésimos momentos centrais e  $X = \bar{r}w + w$ . Com a equação (1) estabelece-se a função de três variáveis  $\mu_1, \mu_2$  e  $\mu_3$ ,  $F(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = E[U(X)]$ .

---

<sup>1</sup>nevesfra@gmail.com

<sup>2</sup>nunes@ime.uerj.br

Diversas pesquisas sobre as características dos mercados financeiros vem sendo realizadas e muitos estudos mostram que o retorno dos ativos financeiros frequentemente não são simétricos, apresentando assimetria, principalmente assimetria positiva. Tal fato ocorre por exemplo nos mercados financeiros Americanos, Australianos e Japoneses [3]. Nesse caso, a distribuição dos retornos do portfólio não será normal. Deste modo, serão necessários momentos de ordem maiores, como a assimetria, para analisar a distribuição do retorno esperado.

O investidor busca que o retorno do portfólio seja o maior o possível, para tanto, a função utilidade com distribuição apresentando assimetria positiva terá a preferência do investidor. Desse modo, o investidor procura maximizar a assimetria. A aversão ao risco está presente na preferência de todo investidor, sendo que, oscila de acordo com o nível de riqueza acumulada do investidor. Daí, o investidor busca minimizar o risco. Logo, o investidor têm preferência pelos momentos de ordem ímpar, optando por rejeitar os momentos de ordem par [4].

Com isso, temos os seguintes problemas de otimização, de acordo com a preferência do investidor, envolvendo os três parâmetros da função 1: minimizar a variância dado um determinado retorno e uma assimetria; maximizar a assimetria dado um determinado risco e retorno; e maximizar o retorno dado um determinado risco e assimetria [1]. A proposta é abordar tais problemas via método de otimização de Lagrange e estabelecer uma análise sobre eles de modo a auxiliar na determinação da fronteira eficiente e escolha do portfólio ótimo para o investidor.

### 3 Conclusões

Os problemas de otimização citados acima são interessantes, uma vez que, a solução deles pode ser usada para encontrar a fronteira eficiente para um portfólio. Não obstante, ao considerar-se a assimetria como parâmetro, o investidor dispõe de mais uma informação que lhe auxiliará na escolha de portfólio, aumentando retorno esperado sobre os seus investimentos. Nossa contribuição será a análise matemática rigorosa e a caracterização da fronteira eficiente do modelo proposto em [1] e [3] e será de grande valia para a teoria moderna do portfólio.

### Referências

- [1] G. M. de Athayde e R. G. Flôres. Jr. Finding a maximum skewness portfolio – a general solution to three moments portfolio choice, *Journal of Economic Dynamics and Control*, volume 28, 2004.
- [2] H. Markowitz. Portfolio Selection, *The Journal of Finance*, volume 7, 1952.
- [3] E. K. Nielsen, Efficient Portfolio Selection in Mean-Variance-Skewness Space, Tese de doutorado em Economia, Aarhus Universitet, (2008).
- [4] R. C. Scott e P. A. Horvath. On the direction of preference for moments of higher order than the variance, *The Journal of Finance*, volume 35, 1980.