Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Combinação de Polinômios e L-Ortogonalidade

Mirela Vanina de Mello[1]
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, UESC, Ilhéus, BA
Cleonice Fátima Bracciali[2]
Departamento de Matemática Aplicada, UNESP, São José do Rio Preto, SP

Resumo. Sejam $\{Q_n^{(1)}\}_{n\geq 0}$ uma sequência de polinômios mônicos L-ortogonais com relação a medida $d\psi_1$ em um intervalo $[a,b]$, $\{\tau_n\}_{n\geq 0}$ uma sequência de números reais e $\{Q_n^{(0)}\}_{n\geq 0}$ uma sequência de polinômios mônicos tais que $Q_n^{(1)}(x) = (1-\tau_n)Q_n^{(0)}(x) + \tau_n x Q_{n-1}^{(0)}(x)$, para $n \geq 1$. Neste trabalho, encontramos condições necessárias sobre os coeficientes τ_n para que a sequência de polinômios $\{Q_n^{(0)}\}_{n\geq 0}$ seja L-ortogonal com relação a uma certa medida $d\psi_0$. Também apresentamos a medida $d\psi_0$ explicitamente.

Palavras-chave. Polinômios L-ortogonais, Combinação de Polinômios, L-ortogonalidade.

1 Introdução

Se ψ é uma função limitada, não decrescente e com infinitos pontos de aumento em $[a,b]$, $0 \leq a < b \leq \infty$, tal que todos os momentos $\mu_n = \int_a^b x^n d\psi(x)$, para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, são finitos, então dizemos que $d\psi$ é uma medida positiva forte em $[a,b]$. A sequência de polinômios $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ que satisfaz

$$\int_a^b x^{-n+s} Q_n(x) d\psi(x) = 0, \qquad \text{para } s = 0, 1, \ldots, n-1$$

é chamada de sequência de polinômios L-ortogonais com relação à medida $d\psi$, veja [3, 5].

Estes polinômios, na forma mônica, satisfazem a relação de recorrência de três termos

$$Q_{n+1}(x) = (x - \beta_{n+1})Q_n(x) - \alpha_{n+1} x Q_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

com $Q_0(x) = 1$, $Q_1(x) = x - \beta_1$, onde

$$\beta_{n+1} = -\alpha_{n+1}\frac{\sigma_{n-1,-1}}{\sigma_{n,-1}} \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1} = \frac{\sigma_{n,n}}{\sigma_{n-1,n-1}}, \quad n \geq 1,$$

$\beta_1 = \sigma_{0,0}/\sigma_{0,-1} = \mu_0/\mu_{-1}$ e $\sigma_{n,s} = \int_a^b x^{-n+s} Q_n(x) d\psi(x)$. Para mais detalhes sobre os polinômios L-ortogonais consulte, por exemplo, [2, 4, 6].

[1] mvmello@uesc.br
[2] cleonice@ibilce.unesp.br

No trabalho de Andrade, Costa e Sri Ranga [1], foi abordado o seguinte problema: "Sejam duas medidas relacionadas da forma

$$\gamma d\psi_0(x) = (x-c)d\psi_1(x)$$

e $\{Q_n^{(0)}\}_{n\geq 0}$ e $\{Q_n^{(1)}\}_{n\geq 0}$ sequências de polinômios L-ortogonais com relação às medidas $d\psi_0$ e $d\psi_1$, respectivamente. Então, os polinômios $Q_n^{(0)}$ e $Q_n^{(1)}$ satisfazem a relação

$$Q_n^{(1)}(x) = (1-\tau_n)Q_n^{(0)}(x) + \tau_n x Q_{n-1}^{(0)}(x), \quad n \geq 1, \tag{1}$$

com $\tau_n = \gamma^{-1}\sigma_{n,n}^{(1)}/\sigma_{n-1,n-1}^{(0)}$, onde $\sigma_{n,m}^{(i)} = \displaystyle\int_a^b x^{-n+m}Q_n^{(i)}(x)d\psi_i(x), i = 1,2$ e $n \geq 0$."

O presente trabalho foi motivado pelo problema inverso, isto é, se os polinômios $Q_n^{(0)}$ e $Q_n^{(1)}$ satisfazem a relação (1), onde $\{Q_n^{(1)}\}_{n\geq 0}$ é uma sequência de polinômios L-ortogonais, então em quais condições $\{Q_n^{(0)}\}_{n\geq 0}$ também é uma sequência de polinômios L-ortogonais? Qual é a forma explícita da medida na qual esses polinômios são L-ortogonais?

2 L-ortogonalidade da sequência de polinômios $\{Q_n^{(0)}\}$

Para demonstrarmos o resultado principal deste trabalho, consideremos as relações apresentadas no lema a seguir.

Lema 2.1. *Sejam $\{Q_n^{(0)}\}_{n\geq 0}$ e $\{Q_n^{(1)}\}_{n\geq 0}$ sequências de polinômios L-ortogonais com relação às medidas $d\psi_0$ e $d\psi_1$, respectivamente, que satisfazem a relação (1). Então, para $n = 2, 3, \ldots,$ temos*

a) $\beta_n^{(1)}(1-\tau_{n-1}) = \beta_n^{(0)}(1-\tau_n)$, *com* $\beta_1^{(1)} = (1-\tau_1)\beta_1^{(0)}$,

b) $\tau_{n-1}\alpha_{n+1}^{(1)} = \tau_n\alpha_n^{(0)}$,

c) $\beta_n^{(1)}\tau_{n-1} + (1-\tau_{n-2})\alpha_n^{(1)} = \beta_{n-1}^{(0)}\tau_{n-1} + (1-\tau_n)\alpha_n^{(0)}$,

onde $\alpha_n^{(i)}$ e $\beta_{n+1}^{(i)}$ são os coeficientes das relações de recorrência de três termos dos polinômios $\{Q_n^{(i)}\}_{n\geq 0}$, para $i = 1, 2$.

Demonstração: Utilizando a relação (1) e as relações de recorrência

$$Q_{n+1}^{(i)}(x) = \left(x - \beta_{n+1}^{(i)}\right)Q_n^{(i)}(x) - \alpha_{n+1}^{(i)}xQ_{n-1}^{(i)}(x), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

satisfeitas pelas sequências de polinômios $\{Q_n^{(0)}\}_{n\geq 0}$ quando $i = 0$ e $\{Q_n^{(1)}\}_{n\geq 0}$ quando $i = 1$, obtemos

$$Q_n^{(0)}(x) = \left[\left(\frac{1-\tau_{n-1}-\tau_n}{1-\tau_n} + \frac{\alpha_n^{(1)}\tau_{n-2}}{(1-\tau_n)\alpha_{n-1}^{(0)}}\right)x - \frac{\beta_n^{(1)}(1-\tau_{n-1})}{1-\tau_n}\right]Q_{n-1}^{(0)}(x)$$
$$+\left[x\left(\frac{\tau_{n-1}}{1-\tau_n} - \frac{\alpha_n^{(1)}\tau_{n-2}}{(1-\tau_n)\alpha_{n-1}^{(0)}}\right) - \frac{\beta_n^{(1)}\tau_{n-1}}{1-\tau_n} - \frac{\alpha_n^{(1)}(1-\tau_{n-2})}{1-\tau_n} + \frac{\alpha_n^{(1)}\beta_{n-1}^{(0)}\tau_{n-2}}{(1-\tau_n)\alpha_{n-1}^{(0)}}\right]xQ_{n-2}^{(0)}(x).$$

Para completar a demonstração do lema, basta comparar a última igualdade com a relação de recorrência de três termos (2) para $i = 0$. ■

Note que se $\tau_1 = 0$, então da relação $b)$ do lema anterior, $\tau_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ e portanto, neste caso, $Q_n^{(0)}(x) \equiv Q_n^{(1)}(x)$, para $n = 0, 1, \ldots$. Assim, a partir daqui, consideramos o caso não trivial $\tau_1 \neq 0$.

As relações apresentadas no Lema 2.1 também podem ser encontradas no trabalho [1]. Embora as relações encontradas sejam as mesmas, no trabalho [1] as demonstrações foram feitas utilizando o fato de que $\gamma d\psi_0(x) = (x - c)d\psi_1(x)$, ou mais precisamente, utilizando

$$\tau_n = \gamma^{-1}\sigma_{n,n}^{(1)}/\sigma_{n-1,n-1}^{(0)}.$$

Como o Lema 2.1 não apresenta a hipótese de que $\gamma d\psi_0(x) = (x - c)d\psi_1(x)$, sua demonstração é ligeiramente diferente da encontrada em [1].

A propriedade de invariância a seguir também é apresentada em [1], e sua demonstração utiliza apenas o Lema 2.1.

Lema 2.2. *Seja* $\Omega_n = \left[\beta_{n+1}^{(0)}\tau_n - (1 - \tau_n)\alpha_{n+1}^{(0)}\right]\dfrac{1 - \tau_{n+1}}{\tau_n}$*, para* $n \geq 1$*. Então,*

$$\Omega_n = \left[\beta_n^{(1)}\tau_n - (1 - \tau_n)\alpha_{n+1}^{(1)}\right]\frac{1 - \tau_{n-1}}{\tau_n}, \ \ com\ \tau_0 = 0.$$

Além disso,

$$\Omega_n = \Omega_{n-1} = \cdots = \Omega_1 = \beta_1^{(1)} - \frac{(1 - \tau_1)}{\tau_1}\alpha_2^{(1)}.$$

De posse desses resultados, podemos demonstrar o principal resultado deste trabalho.

Teorema 2.1. *Sejam* $\{Q_n^{(1)}\}_{n\geq 0}$ *uma sequência de polinômios mônicos L-ortogonais com relação a medida* $d\psi_1$ *em um intervalo* $[a, b]$*,* $\{\tau_n\}_{n\geq 0}$ *uma sequência de números reais e* $\{Q_n^{(0)}\}_{n\geq 0}$ *uma sequência de polinômios mônicos que satisfazem a relação* (1)*. Se* $Q_n^{(0)}$ *é L-ortogonal com relação à uma medida* $d\psi_0$ *então*

$$\tau_n = \left(1 - \frac{Q_n^{(1)}(c)}{\alpha_{n+1}^{(1)}Q_{n-1}^{(1)}(c)}\right)^{-1}, \tag{3}$$

onde $c = \beta_1^{(1)} - (1 - \tau_1)\alpha_2^{(1)}/\tau_1$ *e* $\alpha_{n+1}^{(1)}$ *e* $\beta_{n+1}^{(1)}$ *são os coeficientes da relação de recorrência de três termos dos polinômios L-ortogonais* $\{Q_n^{(1)}\}_{n\geq 0}$*. Neste caso, os coeficientes* $\alpha_{n+1}^{(0)}$ *e* $\beta_{n+1}^{(0)}$ *da relação de recorrência satisfeita pelos polinômios da sequência* $\{Q_n^{(0)}\}_{n\geq 0}$ *são dados por*

$$\begin{cases} \alpha_n^{(0)} = \dfrac{Q_{n-2}^{(1)}(c)\alpha_n^{(1)}\left[\alpha_{n+1}^{(1)}Q_{n-1}^{(1)}(c) - Q_n^{(1)}(c)\right]}{Q_{n-1}^{(1)}(c)\left[\alpha_n^{(1)}Q_{n-2}^{(1)}(c) - Q_{n-1}^{(1)}(c)\right]}, & n = 2, 3, \ldots, \\[2ex] \beta_n^{(0)} = \dfrac{Q_{n-1}^{(1)}(c)\beta_n^{(1)}\left[\beta_{n+1}^{(1)}Q_n^{(1)}(c) + Q_{n+1}^{(1)}(c)\right]}{Q_n^{(1)}(c)\left[\beta_n^{(1)}Q_{n-1}^{(1)}(c) + Q_n^{(1)}(c)\right]}, & n = 1, 2, \ldots. \end{cases} \tag{4}$$

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0030

Além disso, a medida $d\psi_0$ é dada por

$$d\psi_0(x) = \frac{x-c}{\gamma} d\psi_1(x), \tag{5}$$

com $\gamma = \dfrac{\alpha_2^{(1)}\mu_0^{(1)}}{\tau_1\mu_0^{(0)}}$.

Demonstração: Suponhamos que $\{Q_n^{(0)}\}_{n\geq 0}$ é uma sequência de polinômios L-ortogonais com relação a uma certa medida $d\psi_0$. Do Lema 2.2, temos $\Omega_n = \beta_1^{(1)} - \dfrac{1-\tau_1}{\tau_1}\alpha_2^{(1)}$, isto é, Ω_n é independente de n. Afim de simplificar os cálculos, denotaremos $\Omega_n = c$, ou seja,

$$\left[\beta_n^{(1)}\tau_n - (1-\tau_n)\alpha_{n+1}^{(1)}\right]\frac{1-\tau_{n-1}}{\tau_n} = \beta_1^{(1)} - \frac{1-\tau_1}{\tau_1}\alpha_2^{(1)} = c. \tag{6}$$

Agora, definimos uma sequência de números reais $\{y_n\}_{n\geq 0}$ tal que

$$y_0 = 1 \quad \text{e} \quad y_n = -\frac{1-\tau_n}{\tau_n}\alpha_{n+1}^{(1)} y_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Note que podemos escrever

$$1 - \tau_{n-1} = \left(1 - \alpha_n^{(1)}\frac{y_{n-2}}{y_{n-1}}\right)^{-1}.$$

Assim, utilizando a última igualdade e substituindo

$$\frac{1-\tau_n}{\tau_n} = -\frac{y_n}{\alpha_{n+1}^{(1)} y_{n-1}} \tag{7}$$

em (6), obtemos

$$y_n = (c - \beta_n^{(1)})y_{n-1} - c\alpha_n^{(1)} y_{n-2},$$

com $y_0 = 1$ e $y_1 = -\dfrac{(1-\tau_1)}{\tau_1}\alpha_2^{(1)} = c - \beta_1^{(1)}$. Logo, $y_n = Q_n^{(1)}(c)$.

Portanto, isolando τ_n em (7), obtemos

$$\tau_n = \left(1 - \frac{Q_n^{(1)}(c)}{\alpha_{n+1}^{(1)} Q_{n-1}^{(1)}(c)}\right)^{-1}.$$

Pelo Lema 2.1, temos

$$\alpha_n^{(0)} = \frac{\beta_n^{(1)}\tau_{n-1} + (1-\tau_{n-2})\alpha_n^{(1)} - \beta_{n-1}^{(0)}\tau_n}{1-\tau_n} \quad \text{e} \quad \beta_{n-1}^{(0)} = \beta_{n-1}^{(1)}\frac{(1-\tau_{n-2})}{(1-\tau_{n-1})},$$

substituindo τ_n por (3), mostramos que os coeficientes da relação de recorrência de três termos satisfeita pelos polinômios da sequência $\{Q_n^{(0)}\}_{n\geq 0}$ são dados por (4). Note que se

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0030

τ_n é dado por (3), é possível verificar, que $\alpha_n^{(0)}$ também pode ser dado por $\alpha_n^{(0)} = \dfrac{\tau_{n-1}\alpha_{n+1}^{(1)}}{\tau_n}$, para $n \geq 2$.

Finalmente, vamos mostrar a relação (5). De

$$\int_a^b x^{-n+s} Q_n^{(1)}(x) d\psi_0(x) = \int_a^b x^{-n+s} \left[(1-\tau_n)Q_n^{(0)}(x) + \tau_n x Q_{n-1}^{(0)}(x)\right] d\psi_0(x),$$

temos

$$\int_a^b x^{-n+s} Q_n^{(1)}(x) d\psi_0(x) = 0, \qquad \text{para } s = 0, 1, \ldots, n-2.$$

Mas o polinômio $Q_n^{(1)}$ também satisfaz

$$\int_a^b x^{-n+s} Q_n^{(1)}(x) d\psi_1(x) = 0, \text{ para } s = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Logo, uma solução é escolher $d\psi_0(x) = (ux - v)d\psi_1(x)$, onde u e v são constantes a serem determinadas.

Observamos que, por um lado

$$\int_a^b x^{-1} Q_1^{(1)}(x) d\psi_0(x) = \tau_1 \int_a^b Q_0^{(0)}(x) d\psi_0(x) = \tau_1 \mu_0^{(0)}$$

e, por outro lado

$$\int_a^b x^{-1} Q_1^{(1)}(x) d\psi_0(x) = \int_a^b x^{-1} Q_1^{(1)}(x)(ux - v) d\psi_1(x) = u\alpha_2^{(1)}\mu_0^{(1)}.$$

Logo, $u = \dfrac{\tau_1\mu_0^{(0)}}{\alpha_2^{(1)}\mu_0^{(1)}} = \dfrac{1}{\gamma}$. Seguindo o mesmo raciocínio para $\int_a^b Q_0^{(1)}(x) d\psi_0(x)$, obtemos

$$v = \frac{\tau_1\mu_0^{(0)}}{\alpha_2^{(1)}\mu_0^{(1)}} \left[\beta_1^{(1)} - \frac{1-\tau_1}{\tau_1}\alpha_2^{(1)}\right] = \frac{c}{\gamma}.$$

Portanto, $d\psi_0(x) = \dfrac{(x-c)}{\gamma} d\psi_1(x)$.

Para finalizar a demonstração, resta verificar que essa medida é bem determinada. Note que

$$\int_a^b x^{-n+s} Q_n^{(1)}(x) d\psi_0(x) = \int_a^b x^{-n+s} Q_n^{(1)}(x) \frac{x-c}{\gamma} d\psi_1(x) = \begin{cases} 0, & s = 0, 1, \ldots, n-2 \\ \dfrac{\sigma_{n,n}^{(1)}}{\gamma}, & s = n-1 \end{cases}$$

e substituindo $Q_n^{(1)}$ pela relação (1), temos

$$\int_a^b x^{-n+s} Q_n^{(1)}(x) d\psi_0(x) = \begin{cases} 0, & s = 0, 1, \ldots, n-2 \\ \tau_n \sigma_{n-1,n-1}^{(0)}, & s = n-1 \end{cases}.$$

Utilizando $\alpha_{n+1}^{(i)} = \sigma_{n,n}^{(i)}/\sigma_{n-1,n-1}^{(i)}$, para $i = 1, 2$, e a igualdade b) do Lema 2.1, mostramos que $\gamma = \dfrac{\sigma_{n,n}^{(1)}}{\tau_n \sigma_{n-1,n-1}^{(0)}}$, o que completa a demonstração. ■

Utilizando (4) e a relação de recorrência de três termos satisfeita pelos polinômios $\{Q_n^{(0)}\}_{n\geq 0}$, obtemos a seguinte conexão entre os coeficientes das relações de recorrência de três termos dos polinômios $Q_n^{(0)}$ e $Q_n^{(1)}$, para $n \geq 0$.

Corolário 2.1. *Para $n \geq 2$, vale*

$$\frac{\alpha_n^{(0)}}{\beta_n^{(0)}} = \frac{\alpha_n^{(1)}}{\beta_n^{(1)}} \frac{Q_{n-2}^{(1)}(c) Q_n^{(1)}(c)}{\left[Q_{n-1}^{(1)}(c)\right]^2}.$$

3 Conclusões

Obtivemos aqui resultados análogos aos obtidos por Andrade, Costa e Sri Ranga em [1], porém com uma abordagem diferente, considerando o problema inverso, e obtendo uma nova representação para os coeficiente τ_n. Mais do que isso, determinamos a medida na qual os polinômios da sequência $\{Q_n^{(0)}\}_{n\geq 0}$ são L-ortogonais.

Agradecimentos

A primeira autora agradece à UESC e a segunda autora ao CNPq e à FAPESP pelos apoios financeiros recebidos.

Referências

[1] E.X.L. Andrade, M.S. Costa, A. Sri Ranga. L-orthogonal polynomials with related measures, *Appl. Numer. Math.*, 60:1041–1052, 2010.

[2] E. Hendriksen, H.Van Rossum. Orthogonal Laurent polynomials, *Indag. Math.*, 48:17–36, 1986.

[3] W.B. Jones, O. Njåstad, W.J. Thron. Two point Padé expansions for a family of analytic functions, *J. Comput. Appl. Math.*, 9:105–123, 1983.

[4] W.B. Jones, W.J. Thron. Survey of continued fraction methods of solving moment problems, *J. Comput. Appl. Math.*, 9:105–123, 1983.

[5] A. Sri Ranga, Polinômios Ortogonais e Similares, Tese de Livre-Docência, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil, 1990.

[6] A. Sri Ranga, C,F, Bracciali, E.X.L. Andrade, *Polinômios que Satisfazem uma Relação de Recorrência de Três Termos*, Série Notas em Matemática Aplicada, vol. 74, SBMAC, São Carlos, SP, Brasil, 2014.

