

Estrutura Comparativa das Opções Asiáticas Utilizando Simulação de Monte Carlo e a Aproximação de Turnbull-Wakeman

Renato Cesar Sato¹

Instituto de Ciência e Tecnologia - ICT, UNIFESP, São José dos Campos, SP

Resumo. Diante de um panorama de incerteza econômica os derivativos de opções podem fornecer uma ferramenta financeira de especulação ou *hedging*. No contexto das *commodities*, as chamadas opções Asiáticas fornecem uma estrutura baseada na média, e, portanto, com menor volatilidade. Nesse trabalho apresentamos a comparação de duas formas de precificação desse tipo de opção, uma baseada na simulação de Monte Carlo e a outra uma solução analítica por aproximação seguindo o modelo proposto por Turnbull-Wakeman. Ao final, apresentamos os resultados obtidos e as vantagens e desvantagens observadas.

Palavras-chave. Derivativos, Opções Asiáticas, *Commodities*, Simulação de Monte Carlo.

1 Introdução

Em várias situações a precificação de um derivativo depende do valor subjacente em múltiplos momentos do tempo. Um novo aumento no volume das exportações Brasileiras pode conduzir ao recebimento de fluxos de caixa regulares em moeda estrangeira. Por não desejar uma exposição decorrente das flutuações cambiais, uma redução dos riscos inerentes a essa variação da moeda torna-se desejável. Supondo que esse fluxo de caixa seja considerado em termos anuais, ou seja, que essa empresa exportadora não se atenha em recebimentos mensais. A empresa tem como buscar a criação de um *hedging* através de *call options* baseados na média dos fluxos de caixa. Uma vantagem dessa estratégia seria a redução dos custos administrativos das transações por serem mais baratas do que em múltiplas compras mensais e, também pela possibilidade de uma melhor taxa de câmbio no final do ano. Ao utilizar o valor da média nesses múltiplos fluxos do contrato de opção temos uma redução da volatilidade geral. Nesse texto, consideramos o modelo em que uma barreira discreta é tida como uma opção *Vanilla*, isto é, a menos que o *spot* esteja dentro de um determinado intervalo das datas, a opção deixa de existir [1].

Essa estrutura permite ao investidor um melhor planejamento do *hedging* durante os períodos de grande flutuação cambial. Conforme veremos a seguir, as recentes variações do dólar em decorrência dos ajustes internacionais da moeda e também do cenário macroeconômico Brasileiro trazem a tona a importância do uso desse tipo de derivativo.

¹rscato@unifesp.br

Nesse estudo abordamos as opções do tipo Asiática que são importantes no contexto prático para *commodities* que podem sofrer de uma enxurrada de ordens de compra na proximidade da data de vencimento. Esse é um tipo de instrumento financeiro de opções que tenta evitar a manipulação do preço na proximidade da maturidade.

Apesar da existência de longa data das opções Asiáticas, novos métodos continuam surgindo para precificação desses contratos. As principais abordagens encontradas na literatura para precificação de Opções do tipo Asiáticas são a Simulação de Monte Carlo [2], Transformadas de Laplace e Fourier [3] [4], Aproximações por Densidade da Média [5], Árvores Binomiais e Trinomiais [6], Limites Inferiores e Superiores [7], Equações Diferenciais Parciais e Métodos de Diferenças Finitas [8] [9]. Nesse trabalho utilizaremos a Simulação de Monte Carlo em comparação com o método determinístico proposto por Turnbull-Wakeman avaliando se existe uma diferença significativa nos resultados obtido tomando como exemplo o preço do café.

Por se tratar de um texto que busca contextualizar o uso da ferramenta de opções, nossa principal atenção recairá sobre uma breve apresentação das técnicas selecionadas e as diferenças nos resultados obtidos. Em ambos os casos, partimos da premissa de neutralidade do risco por parte do agente.

2 Estrutura das Opções Asiáticas

O surgimento das opções Asiáticas deu-se em 1987 através do *Bankers Trust Tokyo* nos contratos de petróleo, na tentativa de desmotivar possíveis manipulações do mercado. Um exemplo disso é uma opção do tipo *call In the Money* (ITM) pouco antes de sua data de maturidade, ou seja, o preço strike é menor do que o preço de mercado da opção subjacente - isso permite ao detentor da opção comprar a opção subjacente a um preço menor - fazendo o exercício da opção. Mas também poderia ser formada *Out the Money* (OTM) - é o caso em que numa posição *put* o preço da opção é maior do que o *strike* - na maturidade por uma súbita queda nas vendas do ativo. Isso pode parecer difícil de ser realizado em uma opção do tipo Asiática com *strike* fixo. Além disso, essas opções são mais baratas, o que representa um claro benefício para o gerenciamento do risco [10].

O *payoff* de uma opção Asiática depende da média do ativo subjacente no processo de precificação e a opção pode ser dada por:

$$A_t = \left(\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K \right)^+ \quad (1)$$

onde S representa o ativo subscrito, K representa o preço *strike* e T a data de vencimento. E o valor dessa opção no tempo T é dado por:

$$V_{t,T}(S_t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [(A_T - K)^+ | \mathcal{F}_t] \quad (2)$$

onde $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$ é a expectativa sob a medida de risco neutro e \mathcal{F}_t é o espaço probabilístico filtrado [11].

Esse tipo de opção garante um seguro sobre as mudanças médias do preço, no entanto, não existe incentivo para influenciar os preços na sua data de expiração. A opção

Asiática pode ser derivada através das equações diferenciais parciais e para isso deve ser levado em consideração S_t que é o preço do ativo, e $Y_t = \int_0^t S_u du$ até o tempo t . Assim o *payoff* de uma *call* pode ser expressa por

$$A_T^{call} = \left(\frac{Y_T}{T} - K \right)^+ \quad (3)$$

Apresentamos abaixo, respectivamente a forma aritmética e geométrica das opções Asiáticas do tipo *call*:

$$A(S_A) = \left(\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K \right)^+ \quad (4)$$

$$A(S_G) = \left(e^{\frac{1}{T} \int_0^T \log S_t dt} - K \right)^+ \quad (5)$$

Para lidar com as opções Asiáticas no contexto da simulação, nesse texto assumimos que o estado do ativo segue um modelo de tempo contínuo, tal como um movimento Browniano. Desse modo a simulação é realizada para aproximar $E(e^{rT} f(X_T))$, onde r é a taxa de juros sem risco utilizada para o cálculo do desconto de $f(X_T)$, $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ e X_T é o valor do tempo T no processo aleatório $X(t)$ que é a solução para a equação estocástica diferencial abaixo:

$$dX(t) = a(X(t))dt + b(X(t))dB(t) \quad (6)$$

com $X(0) = X_0 \in \mathbb{R}^d$. Temos ainda que $B(t)$ é o movimento Browniano, e $a, b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ são funções que satisfazem as condições de regularidade que garante uma solução única.

2.1 Método de Aproximação Turnbull e Wakeman

O método proposto por Turnbull e Wakeman possibilita a precificação analítica [5] e considera que a média e a variância se ajustem por aproximações de forma que sejam consistentes com o momentos exatos da média aritmética. O ajuste médio b_A e a variância σ_A^2 são então utilizados como entradas na fórmula do *call option* abaixo.

$$c = S e^{(b_A - r)T} N(d_1) - X e^{-rT} N(d_2) \quad (7)$$

e na forma do *put option*

$$p = X e^{(r - b_A)T} N(d_2) - S e^{(b_A - r)T} N(d_1) \quad (8)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (b_A + \sigma_A^2/2)T}{\sigma_A \sqrt{T}} \quad (9)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_A \sqrt{T} \quad (10)$$

A volatilidade e o custo de carregamento da média são dados por $\sigma = \sqrt{\frac{\ln(M_2)}{T} - 2b_A}$ e $b_A = \frac{\ln(M_1)}{T}$.

O primeiro e segundo momento da média aritmética são:

$$M_1 = \frac{e^{bT} - e^{bt_1}}{b(T - t_1)} \quad (11)$$

$$M_2 = \frac{2e^{\sigma^2 T}}{(b + \sigma^2(2b + \sigma^2(T - t_1))^2} + \frac{2e^{(2b + \sigma^2)t_1}}{b(T - t_1)^2} \left[\frac{1}{2b + \sigma^2} - \frac{e^{b(T-t_1)}}{b + \sigma^2} \right] \quad (12)$$

3 Metodologia

O método da simulação de Monte Carlo é uma das principais abordagens para avaliação de ativos que fogem do contexto determinístico. A aplicação dessa técnica para avaliação de opções foi proposta por Boyle [12] dando início a uma variedade de publicações na tentativa de apresentar novas formas para aproximar o valor presente dos ativos. No caso das opções do tipo Asiáticas a técnica do caminho dependente foi a principal expoente dentre as metodologias exploradas [13]. Nesse texto a análise foi realizada considerando um risco neutro e processo da simulação seguiu a estrutura metodológica a seguir [14]: (a) Simulação dos caminhos amostrais das variáveis estáveis sobre um horizonte de tempo relevante de acordo com a medida de risco-neutro, (b) Avaliação dos fluxos de caixa descontados de cada ativo no caminho amostral, (c) Fluxos de caixa descontados médios sobre um dado número de caminhos amostrais. Esse resultado é tido como uma aproximação do valor do ativo.

Posteriormente, considerando os mesmo parâmetros e valor da *call option*, realizou-se uma abordagem analítica por aproximação seguindo a metodologia proposta por Turnbull e Wakeman. Ambos os processos foram conduzidos computacionalmente utilizando o software R utilizando um microcomputador com processador Intel Core i7 2,3 GHz com 8Gb de memória RAM. Como exemplo, utilizou-se o valor inicial o preço do café negociado na Bolsa de Mercadorias e Futuros de São Paulo (BM&F) por ser uma *commodity* de relevância na pauta de exportação do Brasil.

4 Resultados e Discussão

Para a precificação da *commodity* do café obtivemos tanto o resultado por meio da Simulação de Monte Carlo e também pela aproximação analítica de Turnbull e Wakeman. Os resultados obtidos foram testados em duas condições: aumento no número de simulações para avaliar se existe um ganho significativo conforme realizadas mais simulações e a variação na volatilidade.

No caso das opções do tipo Asiáticas temos a situação em que o *payoff* é dado pela média dos preços sobre um determinado período de tempo até a data da maturidade. Ou seja, $(A_S(T_0, T) - K, 0)$ onde $A_S(T_0, T) - K, 0 = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n S_{t_j}$ para um período de tempo. O cálculo do *payoff* esperado descontado será $E(e^{-rT} \max(A_S(T_0, T) - K, 0))$, para obter a média fornecida pelos caminhos simulados. Nesse texto o estudo foi realizado para uma *call option* mas poderia ser facilmente replicado no caso de uma *put option*.

4.1 Variação no número de simulações

A Figura 1 mostra o processo de convergência do teste diante de 20 mil repetições.

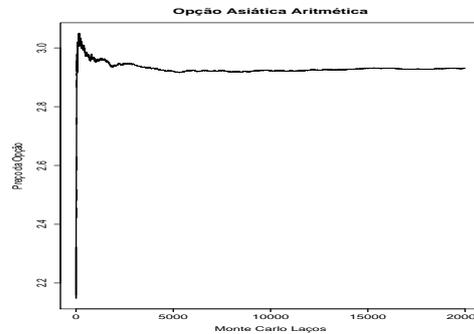


Figura 1: Convergência da Simulação

Tabela 1: Comparação dos Resultados

Número de Simulações	Resultado da Simulação	Variação %
1000	2,953347	3,190
5000	2,920797	2,112
10000	2,922329	2,163
15000	2,930096	2,422
20000	2,930387	2,432

Percebe-se que existe uma dificuldade de convergência exata entre o valor simulado e o valor obtido analiticamente que ofereceu o valor de 2,859122. A coluna de variação apresentada na Tabela 1 mostra a diferença percentual entre os valores obtidos através da simulação e o valor obtido analiticamente. Existe uma pequena diferença nas variações comparativas conforme realizamos mais de cinco mil simulações e para complementar esse achado foi realizado um teste para obter o tempo computacional de processamento da análise. Para cinco mil simulações o tempo foi de 5,790 segundos, enquanto que para realizar as 20 mil simulações transcorreram-se de 24,589 segundos, ou seja, um aumento de mais de três vezes no tempo necessário para obtenção do resultado com diferença de 0,328%.

Temos então que metodologia de Monte Carlo sofre a desvantagem de ser mais lenta para simulações envolvendo dezenas de milhares de repetições quando comparado com resultados obtidos através de métodos determinísticos. No entanto, a possibilidade de convergência dos resultados pode ser uma vantagem atraente quando comparado com um resultado puramente analítico. Como as simulações acima de cinco mil repetições foram realizadas de forma bastante rápida e os resultados mostraram pouca variabilidade comparado com um maior número de interações essa abordagem mostrou-se atrativa.

4.2 Variação na Volatilidade

Para testar se existe uma diferença dos resultados em um nível de maior volatilidade, aumentamos a volatilidade para 8,8, isso representou um aumento na volatilidade de 2.100%. Esse substancial aumento foi realizado de maneira intencional mantendo os demais parâmetros constantes. O resultado analítico forneceu o valor de 64,22203 que serviu de base de comparação. Foram então realizadas mil, cinco mil e 20 mil simulações que apresentaram os respectivos resultados e variações percentuais em relação ao resultado analítico; 55,19796 (16,34%), 50,62136 (26,86%) e 51,43538 (24,86%).

O aumento da volatilidade criou uma maior diferença entre os valores analíticos e simulados, no entanto, as diferenças dos resultados simulados a partir de cinco mil simulações continuaram sendo pequenas em relação ao tempo de gasto no processamento.

4.3 Considerações sobre os resultados obtidos

Os resultados obtidos nessa análise sugerem que o analista deva ser capaz de calibrar os parâmetros do modelo e também avaliar sobre quais condições qual metodologia pode ser mais indicada. O problema observado no uso da metodologia proposta por Turnbull e Wakeman ocorre especialmente nos casos de amostragem que possuam volatilidade muito alta. Nessas situações a imprecisão desse modelo torna-se mais acentuada em relação aos resultados simulados.

Conforme mencionado anteriormente, a flutuação nos preços das *commodities* pode ser grande preocupação em tempos de incerteza e turbulência econômica, especialmente quando uma crise afeta países que dependam desse tipo de produto para compor o *quantum* de exportação. Dessa maneira, o gestor, produtor ou investidor podem recorrer às estratégias de *hedging* como forma de proteção do capital. O objetivo desse trabalho foi demonstrar as vantagens e limitações de ambas metodologias de precificação das opções do tipo Asiáticas, que são bem adequadas para um *hedging* das *commodities*. Novos estudos ampliando a comparação com outras formas de precificação, como a aproximação de Levy [15] e intervalos de confiança serão desenvolvidos futuramente.

5 Conclusões

Nesse trabalho foi avaliado a precificação em Opções Asiáticas por simulação de Monte Carlo e da abordagem analítica do Método de Aproximação Turnbull e Wakeman. Os resultados obtidos sugerem que os ganhos obtidos a partir de cinco mil simulações são pequenos em relação ao aumento no tempo de processamento e um aumento da volatilidade produziu um aumento da diferença na precificação entre os dois métodos. Existe então uma relação de custo-benefício envolvendo precisão, velocidade e simplicidade que o analista deve levar em consideração na escolha entre ambas metodologias.

Referências

- [1] M. S. Joshi. *The concepts and practice of mathematical finance*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [2] A.G.Z. Kemna and A.C.F. Vorst. A pricing method for options based on average asset values. *Journal of Banking Finance*, 14:113–129, 1990.
- [3] M. Yor. Bessel processes, asian options, and perpetuities. In *Exponential Functionals of Brownian Motion and Related Processes*, pages 63–92. Springer, 2001.
- [4] E. Benhamou. Fast fourier transform for discrete asian options. *The journal of computational finance*, 6:49–68, 2002.
- [5] S.M. Turnbull, M. Stuart and L. M. Wakeman. A quick algorithm for pricing european average options. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 26:377–389, 1991.
- [6] J.C. Hull and A.D. White. Efficient procedures for valuing european and american path-dependent options. *The Journal of Derivatives*, 1:21–31, 1993.
- [7] C.L. Rogers and Z.Shi. The value of an asian option. *Journal of Applied Probability*, 32:1077–1088, 1995.
- [8] J. Vecer. A new pde approach for pricing arithmetic average asian options. *Journal of Computational Finance*, 4:105–113, 2001.
- [9] J. Vecer. Unified pricing of asian options. *Risk*, 15:113–116, 2002.
- [10] P. Buchen. *An introduction to exotic option pricing*. CRC Press, Boca Raton, 2012.
- [11] V. Bhansali. *Pricing and Managing Exotic and Hybrid Options*. McGraw-Hill, 1998.
- [12] P. P. Boyle. Options: A monte carlo approach. *Journal of financial economics*, 4:323–338, 1977.
- [13] Y. Umezawa and A. Yamazaki. Pricing path-dependent options with discrete monitoring under time-changed lévy processes. *Applied Mathematical Finance*, 22:133–161, 2015.
- [14] A. Arratia. *Computational Finance: An Introductory Course with R*. Springer Science, New York, 2014.
- [15] C. Chiu, T.S. Dai and Y.D. Lyuu. Pricing asian option by the fft with higher-order error convergence rate under lévy processes. *Applied Mathematics and Computation*, 252:418–437, 2015.