Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Alguns Resultados Quantitativos para Equações Dinâmicas em Escalas Temporais

Iguer Luis Domini dos Santos[1]
Departamento de Matemática, UNESP, Ilha Solteira, SP

Resumo. Neste trabalho, nós estabelecemos resultados de existência de soluções para uma classe generalizada de equações dinâmicas de primeira ordem em escalas temporais. Os resultados obtidos são generalizações de resultados considerados na literatura.

Palavras-chave. Equações Dinâmicas, Existência de Soluções, Escalas Temporais

1 Introdução

Aqui, nós estudamos a seguinte classe generalizada de equações dinâmicas de primeira ordem

$$x^{\Delta}(t) = f(t, x(t), x(\sigma(t))), \qquad t \in [a,b]_{\mathbb{T}} := [a,b] \cap \mathbb{T} \tag{1}$$

sujeitas à condição inicial

$$x(a) = A \tag{2}$$

onde $x : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}^n$ é a função incógnita, $A \in \mathbb{R}^n$ é dado, $\mathbb{T}$ é uma escala temporal, isto é, um subconjunto fechado e não-vazio de números reais, $f : [a,b]_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma função dada, σ é uma função definida na próxima seção, e $x^{\Delta}(t)$ é a derivada delta de x em t.

Resultados de existência de soluções para as equações (1) e (2) podem ser encontrados em [1]. As soluções obtidas em [1] satisfazem a equação (1) Δ-quase todo ponto em $[a,b)_{\mathbb{T}}$ e x^{Δ} é uma função Lebesgue Δ-integrável em $[a,b)_{\mathbb{T}}$.

Motivados por [2], nós estabelecemos resultados quantitativos para as equações (1) e (2). Mais especificamente, nós obtemos generalizações dos teoremas [[2], Theorem 4.7] e [[2], Theorem 4.8]. Nos resultados obtidos aqui, x^{Δ} é uma função rd-contínua em $[a,b]_{\mathbb{T}}$.

2 Preliminares

Nessa seção consideramos conceitos e resultados básicos utilizados no desenvolvimento do presente trabalho.

[1]iguerluis@mat.feis.unesp.br

2.1 Escalas temporais

Definimos a função $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ como

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$$

e a função $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ como

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}.$$

Estamos supondo que $\inf \emptyset = \sup \mathbb{T}$ e $\sup \emptyset = \inf \mathbb{T}$.

Seja $\mu : \mathbb{T} \to [0, +\infty)$ dada por

$$\mu(t) = \sigma(t) - t.$$

Defina também $\mathbb{T}^\kappa$ como $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T} \setminus (\rho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}]_{\mathbb{T}}$ se $\sup \mathbb{T} < \infty$ e $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T}$ se $\sup \mathbb{T} = \infty$.

Considere uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{T}^\kappa$. Se existe $\xi \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que

$$\mid f(\sigma(t)) - f(s) - \xi(\sigma(t) - s) \mid \leq \ \varepsilon \mid \sigma(t) - s \mid$$

para todo $s \in (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$, diz-se que ξ é a derivada delta de f em t e denota-se $\xi = f^\Delta(t)$.

Dada uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{T}^\kappa$, diz-se que f é Δ-diferenciável em t se cada função coordenada $f_i : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ for Δ-diferenciável em t. Neste caso $f^\Delta(t) = (f_1^\Delta(t), ..., f_n^\Delta(t))$.

A seguir enunciamos alguns resultados básicos do cálculo em escalas temporais. O teoremas 2.1 enunciado abaixo pode ser obtido facilmente de [[3], Theorem 1.16].

Teorema 2.1 ([3])**.** *Considere uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{T}^\kappa$. Então, valem as seguintes propriedades:*

(i) Se f é Δ-diferenciável em t, então f é contínua em t.

(ii) Se f é contínua em t e $\sigma(t) > t$, então f is Δ-diferenciável em t. Além disso,

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}.$$

(iii) Se $\sigma(t) = t$, então f é Δ-diferenciável em t se, e somente se, o limite

$$\lim_{s \xrightarrow{\mathbb{T}} t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

existe como um elemento de $\mathbb{R}^n$. Neste caso,

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \xrightarrow{\mathbb{T}} t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}.$$

(iv) Se f é Δ-diferenciável em t, então

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t).$$

Teorema 2.2 ([3])**.** *Sejam $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ diferenciáveis em $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$. Então o produto $fg : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é diferenciável em t com*

$$(fg)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t)g(t) + f(\sigma(t))g^{\Delta}(t) = f(t)g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)g(\sigma(t)).$$

Definição 2.1. *Seja $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$. Se $F^{\Delta}(t) = f(t)$, definimos a integral delta como*

$$\int_a^t f(s)\Delta s = F(t) - F(a).$$

Denotaremos por $C_{rd}(\mathbb{T}; \mathbb{R}^n)$ o conjunto de todas as funções $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ rd-contínuas.

Definição 2.2. *Uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ é rd-contínua se f é contínua em cada ponto $t \in \mathbb{T}$ tal que $\sigma(t) = t$ e $\lim_{s \to t^-} f(s)$ existe e é finito em cada ponto $t \in \mathbb{T}$ tal que $\rho(t) = t$.*

Observamos que cada função rd-contínua é delta-integrável [[3], Theorem 1.73].

Ao longo deste trabalho, se $y, z \in \mathbb{R}^n$ então $\langle y, z \rangle$ denota o produto interno Euclidiano em $\mathbb{R}^n$ e $\|z\|$ denota a norma Euclidiana de z em $\mathbb{R}^n$.

2.2 Equicontinuidade

Definição 2.3. *Seja E uma coleção de funções $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$. Diz-se que E é equicontínuo se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$\|f(t) - f(s)\| < \epsilon$$

para toda $f \in E$ e para cada $t, s \in \mathbb{T}$ satisfazendo $| t - s | < \delta$.

Abaixo enunciamos o Teorema de Arzela-Ascoli.

Teorema 2.3 ([4])**.** *Considere um conjunto compacto K e uma coleção E de funções $f : K \to \mathbb{R}^n$. Suponha que E seja equicontínuo e limitado na norma do supremo. Então toda sequência de E possui subsequência que converge uniformemente em K.*

2.3 Teorema do ponto fixo de Schäfer

A seguir nós enunciamos o Teorema do ponto fixo de Schäfer.

Teorema 2.4 ([2])**.** *Seja X um espaço de Banach e seja $F : X \to X$ contínua e compacta. Suponha que o conjunto*

$$\Gamma = \{x \in X : x = \lambda F(x) \text{ para algum } \lambda \in [0, 1)\}$$

seja limitado. Então F tem pelo menos um ponto fixo.

3 Resultados Principais

Os resultados de existência de soluções obtidos aqui para as equações (1) e (2) são afirmados nos teoremas 3.1 e 3.2.

Seja $C([a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}};\mathbb{R}^n)$ o conjunto de todas as funções contínuas $f:[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}\to\mathbb{R}^n$. Defina a função

$$F: C([a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}};\mathbb{R}^n)\to C([a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}};\mathbb{R}^n)$$

como

$$[Fx](t) := \int_a^t f(s,x(s),x(\sigma(s))\Delta s + A, \qquad t\in[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}. \tag{3}$$

De acordo com o Lema 3.1 abaixo, pontos fixos de F serão soluções das equações (1) e (2). O Lema 3.1 pode ser obtido de modo análogo ao Lema [[2], Lemma 2.2].

Lema 3.1. *Seja* $f:[a,b]_{\mathbb{T}}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ *contínua.*

(i) Se $x\in C([a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}};\mathbb{R}^n)$ *é uma solução das equações* (1) *e* (2)*, então*

$$x(t) = \int_a^t f(s,x(s),x(\sigma(s))\Delta s + A, \qquad t\in[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}. \tag{4}$$

(ii) Se $x\in C([a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}};\mathbb{R}^n)$ *satisfaz a equação* (4) *então* $x^{\Delta}\in C_{rd}([a,b]_{\mathbb{T}};\mathbb{R}^n)$ *e* x *é uma solução das equações* (1) *e* (2)*.*

No Lema 3.2 consideramos $C([a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}};\mathbb{R}^n)$ munido da norma

$$\|x\|_0 := \sup_{t\in[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}} \|x(t)\|.$$

De acordo com o Lema [[2], Lemma 3.3], $(C([a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}};\mathbb{R}^n),\|\cdot\|_0)$ é um espaço de Banach.

Lema 3.2. *Considere o espaço normado* $(C([a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}};\mathbb{R}^n),\|\cdot\|_0)$ *e seja* $F: C([a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}};\mathbb{R}^n)\to C([a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}};\mathbb{R}^n)$ *a função definida na equação* (3)*. Se* $f:[a,b]_{\mathbb{T}}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ *é contínua então* F *é compacta.*

Demonstração. Usaremos o Teorema de Arzela-Ascoli para verificar que F é compacta. Assim, dada a sequência $\{x_i\}$ com $\|x_i\|_0\le r$, mostremos que a sequência $v_i := F(x_i)$ é limitada e equicontínua.

Seja

$$M := \sup\{\|f(t,p,q)\| : t\in[a,b]_{\mathbb{T}}, \|p\|\le r, \|q\|\le r\} < \infty.$$

Temos

$$\begin{aligned}
\|v_i\|_0 &= \sup_{t\in[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}} \|v_i(t)\| \\
&\le \sup_{t\in[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}} \int_a^t \|f(s,x_i(s),x_i(\sigma(s))\|\Delta s + \|A\| \\
&\le \int_a^{\sigma(b)} \|f(s,x_i(s),x_i(\sigma(s))\|\Delta s + \|A\| \\
&\le [\sigma(b)-a]M + \|A\|.
\end{aligned}$$

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0033

e assim $\{v_i\}$ é limitada.

Seja $\epsilon > 0$ dado. Se $t_1, t_2 \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$ segue que

$$\begin{aligned} \|v_i(t_1) - v_i(t_2)\| &\leq \int_{\min\{t_1,t_2\}}^{\max\{t_1,t_2\}} \|f(s, x_i(s), x_i(\sigma(s))\|\Delta s \\ &\leq M \mid t_1 - t_2 \mid \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

quando $\mid t_1 - t_2 \mid < \delta := \frac{\epsilon}{M}$. Dessa forma, $\{v_i\}$ é equicontínua.

O lema segue agora do Teorema de Arzela-Ascoli. $\square$

Teorema 3.1. *Seja $f : [a, b]_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ contínua. Se existem constantes não-negativas L e N tais que*

$$\|f(t, p, q)\| \leq -2L\langle q, f(t, p, q)\rangle + N, \qquad \forall t \in [a, b]_{\mathbb{T}}, p \in \mathbb{R}^n, q \in \mathbb{R}^n \tag{5}$$

então as equações (1) *e* (2) *tem pelo menos uma solução.*

Demonstração. Utilizaremos o Teorema do ponto fixo de Schäfer. Considere o espaço normado $(C([a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}; \mathbb{R}^n), \| \cdot \|_0)$ e a família de equações

$$x = \lambda F x, \qquad \lambda \in [0, 1) \tag{6}$$

onde $F : C([a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}; \mathbb{R}^n) \to C([a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}; \mathbb{R}^n)$ é definida em (3).

Seja $\lambda \in [0, 1)$ tal que $x \in C([a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}; \mathbb{R}^n)$ é uma solução da equação (6). Assim, $x^{\Delta} : [a, b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}^n$ é rd-contínua e x satisfaz as equações

$$x^{\Delta}(t) = \lambda f(t, x(t), x(\sigma(t))), \qquad t \in [a, b]_{\mathbb{T}} \tag{7}$$

e

$$x(a) = \lambda A \tag{8}$$

Seja $r(t) := \|x(t)\|^2$ para todo $t \in [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$. Do Teorema 2.2 segue que

$$r^{\Delta}(t) = \langle x(t) + x(\sigma(t)), x^{\Delta}(t))\rangle$$

e do Teorema 2.1(iv) obtemos

$$\langle x(t) + x(\sigma(t)), x^{\Delta}(t)\rangle = 2\langle x(\sigma(t)), x^{\Delta}(t)\rangle - \mu(t)\|x^{\Delta}(t)\|^2.$$

Logo,

$$r^{\Delta}(t) = 2\langle x(\sigma(t)), x^{\Delta}(t)\rangle - \mu(t)\|x^{\Delta}(t)\|^2.$$

Além disso, de (5) temos que

$$\|\lambda f(t, p, q)\| \leq -2L\langle q, \lambda f(t, p, q)\rangle + N, \qquad \forall t \in [a, b]_{\mathbb{T}}, p \in \mathbb{R}^n, q \in \mathbb{R}^n.$$

Temos

$$
\begin{aligned}
\|x\|_0 &= \|\lambda F x\|_0 \\
&\le \sup_{t\in[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}} \int_a^t \|\lambda f(s,x(s),x(\sigma(s))\|\Delta s + \|\lambda A\| \\
&\le \sup_{t\in[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}} \int_a^t (-2L\langle x(\sigma(s)), \lambda f(s,x(s),x(\sigma(s)))\rangle + N)\Delta s + \|A\| \\
&= \sup_{t\in[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}} \int_a^t (-2L\langle x(\sigma(s)), x^{\Delta}(s)\rangle + N)\Delta s + \|A\| \\
&\le \sup_{t\in[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}} \int_a^t \Big(-2L\langle x(\sigma(s)), x^{\Delta}(s)\rangle + L\mu(s)\|x^{\Delta}(s)\|^2 + N\Big)\Delta s + \|A\| \\
&= \sup_{t\in[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}} \int_a^t \Big(-Lr^{\Delta}(s) + N\Big)\Delta s + \|A\| \\
&= \sup_{t\in[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}} (-L[r(t)-r(a)] + N(t-a)) + \|A\| \\
&\le L\|A\|^2 + N[\sigma(b)-a] + \|A\|.
\end{aligned}
$$

Assim, do Teorema do ponto fixo de Schäfer concluímos que F tem pelo menos um ponto fixo. Portanto as equações (1) e (2) tem pelo menos uma solução. □

Teorema 3.2. *Considere uma função contínua $f : [a,b]_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Se existe uma constante não-negativa K tal que*

$$\langle q, f(t,p,q)\rangle \le K, \qquad \forall t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, p \in \mathbb{R}^n, q \in \mathbb{R}^n$$

então as equações (1) *e* (2) *tem pelo menos uma solução.*

Demonstração. Usaremos o Teorema do ponto fixo de Schäfer. Considere o espaço normado $(C([a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}};\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_0)$ e a família de equações definida em (6). Seja x uma solução das equações (7) e (8) para algum $\lambda \in [0,1)$ e seja r a função definida como na prova do Teorema 3.1. Assim, para cada $t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$,

$$
\begin{aligned}
r^{\Delta}(t) &= 2\langle x(\sigma(t)), x^{\Delta}(t)\rangle - \mu(t)\|x^{\Delta}(t)\|^2 \\
&\le 2\langle x(\sigma(t)), \lambda f(t,x(t),x(\sigma(t)))\rangle \\
&\le 2\lambda K \le 2K.
\end{aligned}
$$

Logo, para cada $t \in [a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}$ segue que

$$
\begin{aligned}
\|x(t)\|^2 = r(t) &= r(a) + \int_a^t r^{\Delta}(s)\Delta s \\
&= \|x(a)\|^2 + \int_a^t r^{\Delta}(s)\Delta s \\
&\le \|\lambda A\|^2 + \int_a^t 2K\Delta s \\
&\le \|A\|^2 + 2K(\sigma(b)-a)
\end{aligned}
$$

e então $\|x\|_0^2 \leq \|A\|^2 + 2K(\sigma(b) - a)$. Do Teorema do ponto fixo de Schäfer segue que F tem pelo menos um ponto fixo. Portanto as equações (1) e (2) tem pelo menos uma solução.

$\square$

4 Conclusões

Esse trabalho contribuiu para a teoria de escalas temporais. Mais especificamente, obtém resultados quantitativos para uma classe generalizada de equações dinâmicas de primeira ordem em escalas temporais. Diferente de [1], os resultados obtidos aqui não impõem hipóteses como $L \sup_{t \in \mathbb{T}} \mu(t) < 1$ ([[1], Theorem 5]) e $N(b-a) < 1$ ([[1], Theorem 7]).

Referências

[1] I. L. D. dos Santos. On qualitative and quantitative results for solutions to first-order dynamic equations on time scales. *Bol. Soc. Mat. Mex. (3)*, 21(2):205–218, 2015.

[2] C. C. Tisdell and A. Zaidi. Basic qualitative and quantitative results for solutions to nonlinear, dynamic equations on time scales with an application to economic modelling. *Nonlinear Anal.*, 68(11):3504–3524, 2008.

[3] M. Bohner and A. Peterson. *Dynamic equations on time scales.* Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2001. An introduction with applications.

[4] Walter Rudin. *Real and complex analysis.* McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0033