Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Avaliação de Opções Financeiras Utilizando o Modelo Heston

Renato Cesar Sato[1]
Instituto de Ciência e Tecnologia - ICT, UNIFESP, São José dos Campos, SP

Resumo. O modelo Black-Scholes permitiu simplificar a precificação de ativos através de uma solução fechada. No entanto, o modelo partiu da premissas de volatilidade constante e retornos na forma log-normal, o que trouxe uma limitação prática diante dos dados empíricos. O modelo de Heston propõe superar essa limitação através de uma precificação na forma quase-fechada das opções. Nesse texto são apresentadas as principais características do modelo de Heston e a exemplificação de precificação por meio da simulação de Monte Carlo e na forma analítica para uma opção tomando como base o preço da ação da Embraer negociada na bolsa de valores de Nova Iorque. **Palavras-chave**. Modelo Heston, Precificação de Opções, Empresa de Aviação, Volatilidade.

1 Introdução

O modelo desenvolvido por Black-Scholes-Merton criou uma verdadeira revolução nas finanças. A fórmula de precificação de opções propostas trouxe a possibilidade de determinar o valor de uma opção de maneira mais precisa. A grande contribuição estava na capacidade de produzir uma opção de uma ação e também estimar seu valor. Em 1973, Fischer Black and Myron Scholes mostraram a possibilidade de produzir uma opção da IBM contendo a mistura de ações e fluxos de caixa dessa empresa. Para manter o preço de opção constante, o ajuste das opções requerem um ajustamento contínuo em termos da quantidade de ações e do fluxo de caixa necessário. Essa descoberta revolucionou o ramo das finanças pois tornou-se possível criar uma serie de opções contendo as variações de risco desejado pelos clientes ao assumirem uma posição. Um importante aprimoramento desse modelo foi desenvolvido por Robert C. Merton, essa contribuição tornou o modelo Black-Scholes mais consistente em suas premissas. Em seu livro Emanuel Derman, que também contribuiu com Black no desenvolvimento do modelo Black-Derman-Toy, comenta que era como se em um mundo repleto de hidrogênio e oxigênio, finalmente alguém descobriu como sintetizar a água [1]. Os negociadores de produtos financeiros passaram então a produzir opções a partir das ações para serem vendidas no mercados financeiros, assim como desconstruir as opções para vender as ações nela contidas.
No entanto, os preços das opções raramente seguem as previsões da fórmula devido as premissas que são necessárias. Assim, a volatilidade introduzida na formula de Black-Scholes que produz o preço depende do preço *strike* e da expiração da opção. Se considerarmos todas essas volatilidades implícitas passamos a ter uma superfície de volatilidade.Uma

[1]rcsato@unifesp.br

evolução mais recente no processo de precificação de opções é o modelo de Heston que assume que o preço de uma ação, S_t segue um processo estocástico do tipo Black-Scholes porém com uma variância v_t que segue o processo proposto por Cox, Ingersoll e Ross [2]. Devido a essas características o modelo de Heston é representado por um sistema bivariado de equações diferenciais estocásticas [3]. Desse modo, uma ação que não rende dividendos e que possui volatilidade estocástica pode ser expressa por:

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_{1,t} \tag{1}$$

$$dv_t = \alpha(S_t, v_t, t)dt + \beta(S_t, v_t, t)dW_{2,t} \tag{2}$$

com

$$dW_{1,t}dW_{2,t} = \rho dt \tag{3}$$

onde S_t representa o preço da ação e v_t sua variância.

O trabalho apresenta o modelo de Heston e uma exemplificação de precificação de opções do tipo Européia baseado nos preços da Embraer com parâmetros constantes. Os resultados são então apresentados na forma de simulação de Monte Carlo e por meio da precificação analítica e finalmente discutidas as vantagens e limitações do modelo.

2 Modelo Heston

O modelo de Heston é um tipo de modelo de volatilidade estocástica em que $\alpha(S_t, v_t, t) = \kappa(\theta - v_t)$ e $\beta(S_t, v_t, t) = \sigma\sqrt{v_t}$. Ele consistem em duas movimentos Brownianos correlacionados.

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_{1,t} \tag{4}$$

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}dW_{2,t} \tag{5}$$

A primeira equação consiste em um movimento Browniano Geométrico que representa a evolução do preço da ação. A segunda equação é um modelo Cox-Ingersoll-Ross [2] e representa a evolução da volatilidade. Dentre as variáveis encontradas no modelo temos θ como o termo médio de v_t, κ representa a velocidade da reversão, σ é a volatilidade, v_t é a variância instantânea e μ representa a taxa de retorno de longo prazo.

Recomenda-se que o termo κ deve seguir a condição de Feller $2\kappa\theta > \eta^2$. Deve ser observado que essa condição é válida para processos de tempo contínuo, mas como nesse texto a simulação foi realizada em tempo discreto ela servirá apenas como forma de aproximação confome encontrado na literatura [3] e servirá para garantir que a volatilidade seja sempre positiva.

Considerando um cenário de neutralidade de risco, e seja $x_t = lnS_t$, o modelo de Heston pode ser expressa por:

$$dx_t = \left(r - \frac{1}{2}v_t\right)dt + \sqrt{v_t}dW^*_{1,t} \tag{6}$$

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}dW^*_{2,t} \tag{7}$$

com

$$dW^*_{1,t}dW^*_{2,t} = \rho dt \tag{8}$$

onde $\kappa^* = \kappa + \lambda$ e $\theta^* = \frac{\kappa\theta}{\kappa+\lambda}$.

Como os termos $dW^*_{1,t}$ e $dW^*_{2,t}$ são correlacionados eles possuem uma distribuição normal multivariada com $N(0, \sigma)$ onde σ é a matriz de variância-covariância. Nessa estrutura uma *call option* cuja probabilidade tem sua maturidade no *in-the-money*, lembrando que *in-the-money* representa a situação que é possível comprar uma ação abaixo do seu preço de mercado, condicionada sob o log do preço da ação e ajustada com probabilidades de risco neutro pode ser expressa por:

$$F_j(x, v, T; lnK) = Prob(x(T) \geq lnK | x_t = x, v_t = v)$$

O preço de uma *call option* do tipo *Vanilla* é definido como sendo:

$$C(S, v, t) = SF_1 - e^{-r(T-t)}KF_2 \tag{9}$$

onde os termos F_1 e F_2 devem satisfazer a equação diferencial parcial para $j = 1, 2$.

$$\frac{1}{2}v\frac{\delta^2 F_j}{\delta x^2} + \rho\sigma v\frac{\delta^2 F_j}{\delta x \delta v} + \frac{1}{2}\sigma^2 v\frac{\delta^2 F_j}{\delta v^2} + (r + u_j v)\frac{\delta F_j}{\delta x} + (a_j - b_j v)\frac{j}{\delta v} + \frac{\delta F_j}{\delta t} = 0 \tag{10}$$

os parâmetros da equação (10) são $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = -\frac{1}{2}$, $a = \kappa\theta$, $b_1 = \kappa + \lambda - \rho\sigma$ e $b_2 = \kappa + \lambda$.

3 Estudo de Caso - Opções sobre as ações da Embraer

Para fins de exemplificação do uso do modelo de Heston utilizamos como exemplo as cotações das ações da Embraer negociadas na Bolsa de Valores de Nova Iorque (NYSE). A Figura 1a apresenta uma evolução histórica dessas cotações entre os anos de 2000 e 2015, e a Figura 1b um detalhamento sobre o período de janeiro de 2015 até janeiro de 2016. Esse recorte busca mostrar como o uso de opções podem proteger o investidor diante das flutuações futuras.

A Figura 2 apresenta uma comparação entre o desempenho das cotações da Embraer e o índice SP&500.

As Figuras 1a, 1b e 2 apresentam o respectivamente o desempenho das ações da Embraer ao longo do tempo negociadas na Bolsa de Valores de Nova Iorque (NYSE), e no último ano e sua comparação com o índice SP&500 em termos da mudança no preço. Temos assim uma representação que o movimento da ação estudada teve um desempenho recente inferior a economia, o que pode-se visualizar uma oportunidade de estratégia de *hedge* para o investidor. A escolha da empresa Embraer e dos valores negociados na NYSE foram utilizadas devido a disponibilidade dos dados para exemplificar a aplicação do modelo Heston.

[a] [b]

Figura 1: Ações Embraer NYSE

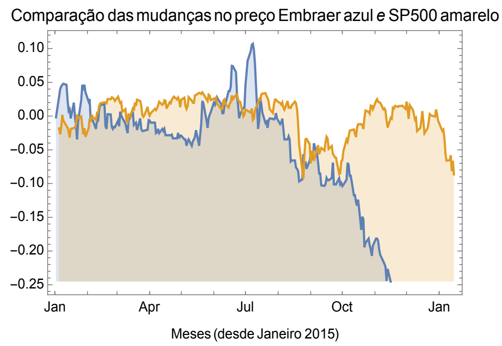

Figura 2: Comparação Embraer e SP&500

4 Metodologia

Na pesquisa foram consideradas duas séries, a primeira representando o preço da ação e a segunda série representando a volatilidade. Foram então precificadas três *call options* do tipo Europeia. Tem-se que κ a média de reversão do CIR foi de 0.003, θ é a variância de longo prazo definida como 0.04. A volatilidade foi de 0.009 e a variância inicial foi definida em 0.04, bem como a taxa de curto prazo inicial como 0.015. Esses valores foram definidos de maneira arbitrária para fins de exemplificação apenas.

Utilizamos para fins da simulação o preço inicial da ação no valor de 27,18 dólares e com base na serie histórica da ação nos últimos 12 meses estabelecemos a volatilidade dos preços.

Consideramos então o número de 100.000 simulações e uma frequência mensal para um período de maturidade da opção de cinco anos. Os dados foram obtidos nas cotações da Embraer no NYSE através do site Yahoo.com na área de finanças [4].

5 Resultados e Discussão

O modelo Black-Scholes possui a limitação de considerar que a volatilidade é constante ao longo do tempo [5]. O dados financeiros reais podem demonstrar agrupamentos de volatilidade, que se alternam entre altos e baixos e vice-versa. No mercado de ativos, quando o preço de uma ação cai sua volatilidade aumenta. A vantagem do modelo Heston utilizado foi considerar a volatilidade como não constante e incluí-la ao termo de correlação. Isso permitiu superar a dificuldade de ajuste dos parâmetros aos preços correntes quando comparado com as opções do tipo Vanilla. Breeden e Litzenberger mostraram que a densidade de risco neutro pode ser derivada a partir dos preços das opções do tipo Européias [6]. No entanto, a demonstração que sob essa condição de risco neutro existe um único processo de difusão com essa distribuição foi apresentada posteriormente por Dupire [7] e Derman e Kani [8] [5]. O modelo Heston pode ser considerado como uma extensão do modelo Black-Scholes porém com uma modelagem de volatilidade na forma de processo estocástico [9].

Tabela 1: Resultados da Simulação

Preço Stike	Preço MC	Lim Inf. 95%	Lim Sup. 95%	Preço Analítico
40	6.50	6.39	6.60	6.58
27.18	10.27	10.14	10.39	10.37
12	18.02	17.88	18.17	18.13

Na Tabela 1, a coluna Preço MC representa os preços estimados através da simulação de Monte Carlo e as colunas Lim.Inf. 95% e Lim.Sup.95% representam os intervalos de confiança ao redor da estimação. A última coluna denominada de Preço Analítico mostra os resultados fornecidos pela estimação analítica utilizando o método Heston para uma opção do tipo *Call*. Percebe-se uma diferença de 1,23%, 0,97%, 0,62% para os preços strike de 40, 27,18 e 12 respectivamente. Ambas estimações através do modelo Heston apresentaram resultados semelhantes, havendo um aumento no tempo de processamento no caso da estimação por simulação em 5.445 segundos, o que pode ser considerado pouco representativo no estudo.

No contexto prático, a volatilidade de reversão e outras variáveis constantes nesse estudo poderiam ser definidas de maneira dinâmica para permitir novos ajustes no modelo. Precisariam ser estimados os parâmetros: $\kappa, \theta, \sigma, V_0, \rho, \lambda$. Pesquisas sugerem que os parâmetros e suas estimativas nas series temporais são diferentes [10], e, portanto, não podem ser estimadas diretamente [11]. Desse modo as vantagens e desvantagens das abordagens metodológicas realizadas ficariam mais evidentes na situação de calibração dos parâmetros, no entanto essa abordagem será realizada em trabalhos futuros.

Pode-se resumir que as principais vantagens do modelo de Heston são:

- A forma semi-fechada de solução para opções Europeias. Isso permite uma calibragem mais rápida do modelo.
- A dinâmica de preços do modelo Heston permite o uso de distribuição de probabilidade log-normal. Essa é uma limitação que encontramos no modelo Black-Scholes.
- O modelo ajusta a superfície de volatilidade para os preços das opções quando o tempo de maturidade não é demasiadamente pequeno.

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0120

- A volatilidade possui reversão de média
- O modelo considera o efeito de alavancagem como a correlação negativa dos retornos e a volatilidade implícita e também permite uma correlação entre o ativo e volatilidade quando alterada.

E as desvantagens do modelo temos [12]:

- Como a volatilidade não pode ser observada, os parâmetros do modelo não podem ser estimados facilmente.
- Os preços emitidos pelo modelo são sensíveis aos parâmetros, e, portanto, o ajuste do modelo fica dependente de uma calibração eficiente.
- O modelo apresenta dificuldade para fornecer bons resultados quando o tempo de maturidade é curto. Por isso, nesse estudo considerou-se uma maturidade de cinco anos. Uma solução para lidar com essa problemática seria a inclusão de saltos no modelo.

Para finalizar vale lembrar duas opiniões sobre o mercado de derivativos financeiros que se opõem, e, diante dessa oposição vemos que muito ainda tem que ser evoluído nessa área de pesquisa. Warren Buffett comentou em uma comunicação para os acionistas das Berkshire Hathaway que: *The genie is now well out of the bottle, and these instruments will almost certainly multiply in variety and number until some event makes their toxicity clear. Central banks and governments have so far found no effective way to control, or even monitor, the risks posed by these contracts. In my view, derivatives are financial weapons of mass destruction, carrying dangers that, while now latent, are potentially lethal* [13]. Por outro lado, Alan Greenspan na posição de presidente do Banco Central dos Estados Unidos comentou na conferência de Estrutura Bancária e Competição que os benefícios e custos relacionados ao uso dos derivativos financeiros são tema de debate, no entanto, o desempenho da economia e do sistema financeiro sugerem que seus benefícios ultrapassam seus custos [14].

Esse debate parece mesmo nos dias atuais longe de uma conclusão definitiva. Os avanços no desenvolvimento e aplicação dos modelos matemáticos nessa área continuam sendo um campo fértil onde inúmeros problemas e limitações ainda necessitam ser superados.

6 Conclusões

Apesar da importante revolução promovida nas finanças após o desenvolvimento do modelo Black-Scholes sua limitação ficou clara diante da premissa de volatilidade constante e retornos log-normais. Atualmente esse modelo têm sido mais utilizado como forma de comparação com outros modelos do que uma solução final. O modelo Heston pode ser considerada uma extensão do modelo Black-Scholes ao não considerar a volatilidade constante. Considerando os parâmetros constante não houve uma expressiva diferença entre as abordagens simuladas e analíticas. No entanto, existe ainda a dificuldade de calibrar a sensibilidade dos parâmetros durante o processo de precificação. Isso sugere que as soluções definitivas sobre como precificar as opções diante das variações observadas no mercado continuam sendo um desafio a ser superado.

Referências

[1] E. Derman. *My life as a quant: reflections on physics and finance.* John Wiley and Sons, New Jersey, 2004.

[2] J.E. Ingersoll J.C. Cox and S.A. Ross. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53:385–407, 1985.

[3] F.D. Rouah. *The Heston Model and Its Extensions in Matlab and C#.* John Wiley and Sons, New Jersey, 2013.

[4] Yahoo finance http://finance.yahoo.com/, 01 2016.

[5] J. Gatheral. *The volatility surface: a practitioner's guide.* John Wiley and Sons, New Jersey, 2011.

[6] R.H. Litzenberger D.T. Breeden. Prices of state-contingent claims implicit in option prices. *Journal of business*, 51:621–651, 1978.

[7] B. Dupire. Pricing with a smile. *Risk*, 7:18–20, 1994.

[8] I. Kani E. Derman and N. Chrissl. Implied trinomial tress of the volatility smile. *The Journal of Derivatives*, 3:7–22, 1996.

[9] S.L. Heston. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of financial studies*, 6:327–343, 1993.

[10] C. Cao G. Bakshi and Z. Chen. Empirical performance of alternative option pricing models. *The Journal of Finance*, 52:2003–2049, 1997.

[11] N. Moodley. *The Heston model: A practical approach with Matlab code.* PhD thesis, University of the Witwatersrand, 2005.

[12] R. Bauer. *Fast calibration in the Heston model.* Phd thesis, Vienna University of Technology, 2012.

[13] W.E. Buffet. 2002 annual report. Technical report, Berkshire Hathaway Inc., 2002.

[14] FederalReserve. Remarks by chairman Alan Greenspan. In *Corporate governance.* 2003 Conference on Bank Structure and Competition, 2003.

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0120