

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Polinômios com Coeficientes de Fibonacci e Wavelets

Regina Litz Lamblém¹

Curso de Matemática, UEMS, Cassilândia, MS

Fabício Ely Gossler²

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, FEIS-UNESP, SP

Marco A. Q. Duarte³

Curso de Matemática, UEMS, Cassilândia, MS

Francisco Villarreal⁴

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Departamento de Matemática, FEIS-UNESP, SP

Resumo. Neste trabalho, considera-se uma função racional cujo numerador e denominador são polinômios com coeficientes de Fibonacci. O principal objetivo é mostrar que a derivada quarta dessa função obtida a partir dos polinômios com coeficientes de Fibonacci é uma função wavelet.

Palavras-chave. Sequência de Fibonacci, Funções racionais, Wavelets.

1 Introdução

A sequência definida recursivamente pela fórmula $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ e $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$, $n \geq 2$, é chamada de sequência de Fibonacci. Essa nomenclatura é devido ao matemático Leonardo Fibonacci que viveu no século XIII. Os termos da sequência de Fibonacci são chamados números de Fibonacci.

Segundo Boyer [1], Leonardo Fibonacci ou filho de Bonaccio, foi comerciante e governante da cidade italiana de Pisa e escritor do livro Liber Abaci (ou livro do ábaco). O Liber Abaci não se trata de um livro sobre o ábaco, mas de um tratado exaustivo sobre problemas e métodos algébricos em que o emprego de numerais indo-arábicos é fortemente recomendado.

A sequência de Fibonacci tem aplicações na análise de mercados financeiros, na ciência da computação e na teoria dos jogos. Também aparece em configurações biológicas, como, por exemplo, na disposição dos galhos de certas árvores, no arranjo do cone da alcachofra, do abacaxi, ou no desenrolar da samambaia, e, também nos alvéolos de cera destinados a serem receptáculos de mel, ver, por exemplo, [3, 5, 7, 8].

¹lamblem@uems.br

²fabricioely08@gmail.com

³marco@uems.br

⁴villa@mat.feis.unesp.br

A sequência de polinômios $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ definida por $P_0(x) = 1$ e

$$P_n(x) = xP_{n-1}(x) + F_{n+1}, \quad n \geq 1,$$

ou seja, $P_n(x) = \sum_{k=0}^n F_{k+1}x^{n-k}$, é chamada de sequência de polinômios com coeficientes de Fibonacci, ver [4]. Segundo Mansour e Shattuck [9] esses polinômios foram introduzidos por Garth, Mills e Mitchell em [4].

O grupo de autores do presente trabalho tem se dedicado ao estudo das relações entre polinômios com coeficientes de Fibonacci e wavelets no sentido de encontrar uma família de funções wavelets a partir de tais polinômios.

A análise wavelet vem se destacando nos últimos tempos em várias aplicações nas mais diversas áreas: medicina, física, engenharia, telecomunicações, entre outras, ver, por exemplo [2] e [11]. A principal ferramenta da análise wavelet é a transformada wavelet, ver [2] e [10], que em sua versão contínua é dada por

$$W_f(a, b) = \langle \Psi_{a,b}, f(x) \rangle = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \Psi^*\left(\frac{x-b}{a}\right) dx, \quad (1)$$

sendo que $f(t)$ é a função (ou sinal) que está sendo analisada, Ψ^* é o conjugado complexo da função moduladora Ψ , definida como função wavelet, a é o fator de escala, que permite que a função wavelet seja comprimida ou dilatada, b é o fator de deslocamento (ou translação) que faz com que a wavelet seja deslocada ao longo do eixo horizontal.

Observando a equação (1), verifica-se que a transformada wavelet pode ser vista como uma operação que faz uma comparação entre a função $f(t)$ e a função moduladora $\Psi(t)$, o que explica a existência dos parâmetros de escala a e de translação b , ver [2]. Como veremos na seção 2, graficamente uma função wavelet é uma onda de curta duração.

Existem várias funções wavelets e a escolha de qual deve ser usada como função moduladora na análise de um determinado sinal depende da semelhança entre a wavelet e o sinal a ser analisado, ver [2] e [10]. Logo, a construção ou descoberta de novas funções wavelets são sempre bem vindas nas aplicações da análise wavelet.

Assim, neste trabalho verifica-se que a derivada quarta da função racional cujo numerador e denominador são os polinômios com coeficientes de Fibonacci $p_1(x)$ e $p_2(x)$, respectivamente, é uma função wavelet.

2 Wavelets

O conjunto $L^2(\mathbb{R})$ é o espaço das funções, mensuráveis a Lebesgue, de quadrado integrável, denominado também de espaço das funções de energia finita, isto é, se $\Psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$, ver [6], então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x)|^2 dx < \infty. \quad (2)$$

Definição: Uma função $\Psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$ é denominada wavelet se, e somente se, sua transformada de Fourier $\hat{\Psi}(\omega)$ satisfaz a condição

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\Psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty. \tag{3}$$

A condição anterior, equação (3), é chamada de condição de admissibilidade, ver [2]. Segue da condição de admissibilidade que $\lim_{\omega \rightarrow 0} \hat{\Psi}(\omega) = 0$. Assim, se $\hat{\Psi}(\omega)$ é contínua então $\hat{\Psi}(0) = 0$, ou seja

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x) dx = 0. \tag{4}$$

Geometricamente, a equação (4) estabelece que $\Psi(x)$ deve oscilar de modo a cancelar as áreas positivas e negativas a fim de anular a integral. Portanto, o gráfico de $\Psi(x)$ tem a forma de uma onda, conforme ilustra a Figura 1, que é um exemplo de wavelet, conhecida como wavelet de Morlet [2].

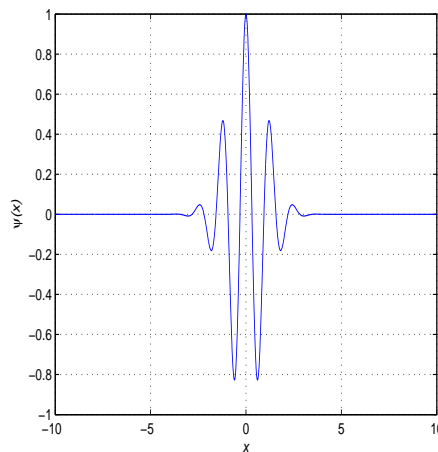


Figura 1: Wavelet de Morlet

Como $\Psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$, então $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \Psi(x) = 0$ e, como $\Psi(x)$ deve estar bem localizada no tempo, este decaimento deve ser muito rápido. Assim, ela terá a forma de uma onda de curta duração.

3 Uma Função Wavelet Gerada a Partir de Polinômios com Coeficientes de Fibonacci

Considerando $p_1(x)$ e $p_2(x)$ polinômios com coeficientes de Fibonacci. Nesta seção será mostrado que a derivada quarta da função $f(x) = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$ é uma função wavelet.

Sendo $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+2}$, sua derivada quarta é dada pela equação (5), com gráfico exibido na Figura 2

$$\Psi(x) = \frac{24(x^5 + 5x^4 - 10x^3 - 30x^2 - 5x + 5)}{(x^2 + x + 2)^5}. \quad (5)$$

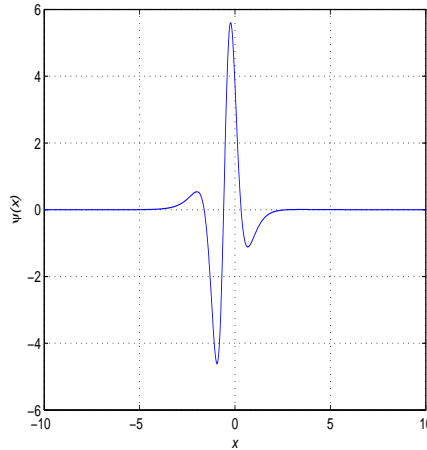


Figura 2: Gráfico da derivada quarta de $\Psi(x) = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$

Observando o gráfico apresentado na Figura 2, nota-se que visualmente ele apresenta características de uma função wavelet, decaimento rápido para zero e forma de uma onda curta. Em virtude do denominador da função da equação (5) ter grau maior que o numerador, verifica-se que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \Psi(x) = 0$. Com o auxílio do software *Wolfram Mathematica* verificou-se que as áreas delimitadas pelo gráfico de $\Psi(x)$ abaixo e acima do eixo horizontal se anulam, pois $\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x)dx = 0$ e, como $\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x)|^2 dx = \frac{46080\pi}{2401\sqrt{7}} < \infty$, $\Psi(x)$ é uma função pertencente a $L^2(\mathbb{R})$.

A transformada de Fourier $\hat{\Psi}(x)$, da função apresentada em (5), é

$$\hat{\Psi}(\omega) = \frac{1}{7} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{7}+i)\omega} \omega^4 [(\sqrt{7} - 7i)e^{\sqrt{7}\omega} \Theta(-\omega) + (\sqrt{7} + 7i)\Theta(\omega)], \quad (6)$$

sendo que $\Theta(\omega)$ é a função degrau.

Seguindo os cálculos, obtém-se

$$\frac{|\hat{\Psi}(\omega)|^2}{|\omega|} = \frac{e^{-\sqrt{7}\omega} \pi |\omega^4 [(-7i + \sqrt{7})e^{\sqrt{7}\omega} \Theta(-\omega) + (7i + \sqrt{7})\Theta(\omega)]|^2}{98|\omega|}, \quad (7)$$

possibilitando o cálculo da integral, conforme a equação (3), constatando a condição de admissibilidade, $C_\psi = \frac{5760\pi}{2401} < \infty$, concluímos que a função $\Psi(x)$ dada pela equação (5) é uma wavelet.

Nota-se também, que a wavelet obtida pela equação (6) e exibida na Figura 2 é bastante assimétrica. A assimetria de uma função wavelet não deve ser vista como um problema para as suas aplicações, pois na decomposição de um sinal pela transformada wavelet o

que se procura é o melhor ajuste entre o sinal e a função wavelet usada. Quando se trata de sinais reais, aqueles obtidos de fenômenos naturais, estes, nem sempre são simétricos e, por isso, podem se ajustar melhor com funções assimétricas. As wavelets de Daubechies, por exemplo, não têm nenhum tipo de simetria e estão entre as mais aplicadas na literatura especializada [2].

A função obtida nesse trabalho ainda precisa ser discretizada, objetivando a posterior obtenção dos filtros de análise e síntese para as respectivas aplicações da transformada wavelet discreta e sua inversa [2]. Ela, porém, já pode ser usada na decomposição de sinais pela transformada wavelet contínua, que tem vasta aplicação na análise de transitórios em sinais elétricos, entre outros [11].

4 Conclusões

Com a vasta gama de aplicações da transformada wavelet e a necessidade de funções que casem com o sinal a ser processado, novas funções wavelets serão sempre usadas em algum tipo de aplicação.

Os resultados apresentados aqui tratam de apenas uma função que relaciona polinômios com coeficientes de Fibonacci e wavelet, mas estudos numéricos, preliminares, apontam que podem haver outras funções que relacionam polinômios com coeficientes de Fibonacci e wavelet.

Estudos continuam, no sentido de detectar novas funções wavelet a partir dos polinômios com coeficientes de Fibonacci, simétricas ou assimétricas, bem como determinar os coeficientes dos filtros wavelet para estas novas funções. Tais filtros são fundamentais para o uso transformada wavelet discreta, a mais usada das versões transformada wavelet.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq pelo apoio financeiro.

Referências

- [1] C. B. Boyer. *História da Matemática*. Edgard Blucher Ltda, São Paulo, 1999.
- [2] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM Books, Philadelphia, 1992.
- [3] G. G. Garbi. *O Romance das Equações Algébricas*. 3ª edição. São Paulo: Livraria Física, 2009.
- [4] D. Garth, D. Mills and P. Mitchell, Polynomials Generated by the Fibonacci Sequence, *Journal of Integer Sequences*, 10:1-12, 2007.
- [5] B. Goodwin. *How The Leopards Changed its Spots: The Evolution of Complexity*. New York: Touchstone, 1996.

- [6] S. C. Höning, A Integral de Lebesgue e suas Aplicações, In *Colóquio Brasileiro de Matemática* (Editora IMPA), Poços de Calda, Julho de 1977.
- [7] H. E. Huntley. *A Divina Proporção*. Brasília. Editora UnB, 1985.
- [8] M. Livio. *The Golden Ratio*. New York: Broadway Books, 2002.
- [9] T. Mansour and M. Shattuck, Polynomials whose coefficients are k-Fibonacci numbers. *Annales Mathematicae et Informaticae*, 40:57–76, 2012.
- [10] Y. Nievergelt. *Wavelets Made Easy*. Birkhäuser, Boston, 1999.
- [11] H. M. Oliveira. *Análise de Sinais para Engenheiros: uma abordagem via Wavelets*. Rio de Janeiro: Brasport, 2007.