

## Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

# Controle não linear utilizando identificação de controladores

Alexandre Molter<sup>1</sup>, Fabrício Bandeira Cabral<sup>2</sup>

Departamento de Matemática e Estatística, Instituto de Física e Matemática, UFPel, Pelotas, RS  
Lucas dos Santos Fernandez<sup>3</sup>

Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, LNCC, Petrópolis, RJ

**Resumo.** A técnica de identificação de controladores é aplicada ao controle de sistemas não lineares sem o conhecimento dos valores dos parâmetros dos sistemas. Neste trabalho propomos uma classe de controladores cúbicos como candidatos a controlar o sistema de modo que este siga trajetórias desejadas. Simulações e resultados são apresentados. O artigo também tem caráter didático ao mostrar de forma simples como aplicar a técnica de identificação de controladores.

**Palavras-chave.** Sistemas não lineares, Controle, Identificação de controladores.

## 1 Introdução

Os fenômenos naturais que levam à modelagem dos sistemas dinâmicos não lineares aparecem em diversas áreas do conhecimento, despertando grande interesse dos pesquisadores, tanto para descrevê-los na forma de equações matemáticas, como para obter controle de sua dinâmica.

A busca por técnicas de controle de sistemas não lineares, que se apresentem cada vez mais eficientes, continua sendo um desafio aos pesquisadores na atualidade. Na literatura das últimas cinco décadas podemos encontrar diversas teorias de controle, baseadas principalmente em controladores do tipo proporcional-integral-derivativo (PID). Pode-se observar nas metodologias de controle que os controladores são, na maioria das vezes, ajustados por métodos empíricos e operadores experientes. Em paralelo a esta situação temos desenvolvimentos teóricos complexos e com muitas hipóteses restritivas sobre os sistemas a serem controlados.

De fato, existem poucas técnicas de controle que usem informações minimais sobre os sistemas a serem controlados. Dentre essas técnicas podemos destacar a que deu origem aos métodos de identificação de controladores e de controle não falsificado [7, 8]. Note-se que estes métodos fazem parte de um questionamento mais amplo da formulação do problema de controle de modo que dados experimentais sejam utilizados [6]. A vantagem destes métodos em relação a outros é que eles não necessitam, para sua aplicação, conhecimentos prévios do estado, propriedades físicas dos modelos ou funções de controle. Pode-se

---

<sup>1</sup>alexandre.molter@ufpel.edu.br

<sup>2</sup>fabriciocabral2000@yahoo.com

<sup>3</sup>lucasf@lncc.br

observar que os controladores mais usuais necessitam conhecer o estado e os parâmetros físicos do sistema para sua aplicação, o que pode aguçar a perspectiva sobre a técnica da identificação de controladores, que não exige esses conhecimentos prévios.

O objetivo neste trabalho é utilizar a técnica de identificação de controladores para identificar funções de controle e controlar a trajetória de sistemas dinâmicos não lineares bem conhecidos, a saber, o oscilador Duffing [4] e o sistema de Rössler [5]. Na literatura pode-se encontrar diversas metodologias para controlar estes sistemas, dentre as quais, as utilizadas em [1,3,4]. Em geral, o que se percebe nestas aplicações é que os controladores utilizados são de controle proporcional. Então, a ideia norteadora é propor funções de controle que sejam simples, como as do controle proporcional, utilizando, no entanto, funções de controle cúbicas. Identifica-se, dentre uma família de candidatos a controladores, aqueles que apresentam melhor desempenho. Além disto, a constante multiplicativa da função de controle é modificada dentro de certo período de tempo previamente estipulado. Esta modificação tem o intuito de melhorar o desempenho do controlador.

A eficiência da metodologia proposta é verificada através de simulações numéricas. Serão apresentadas simulações dos sistemas supracitados, onde se busca levar as trajetórias temporais do sistema para trajetórias desejadas.

## 2 A Metodologia da Identificação de Controladores

A descrição generalizada da técnica de identificação de controladores é feita em [7]. Nesta técnica não são utilizados modelos para o sistema a ser controlado, exceto o próprio modelo fornecido pelos dados experimentais. Para os casos apresentados neste trabalho, necessitam-se apenas de funções de referência  $r$  para obter as funções de controle  $u$  (neste estudo  $u$  são leis de controle polinomiais) e os dados  $y$ , advindos do sistema dinâmico. Propõe-se uma família de controladores candidatos e avalia-se o seu desempenho. Utilizando-se o conceito de referência fictícia podemos avaliar o desempenho de controladores que não estão atuando sobre a planta no momento.

Tomamos como foco do estudo neste trabalho a identificação de controladores para o caso de uma família de controladores polinomiais de orden  $n$ . Neste caso, a lei de controle é dada por

$$u = (K(r - y))^n, \tag{1}$$

**Teorema.** *Dentre os controladores da classe (1), o controlador que minimiza o critério de desempenho*

$$I = \int_0^t (y - w_m * r_K)^2 d\tau, \tag{2}$$

onde  $w_m(s)$  é uma função de transferência de comportamento desejável corresponde a  $\hat{K}$  dado por

$$\hat{K} = \frac{C}{B}, \tag{3}$$

onde

$$B = \int_0^t (y - y_m)u_m d\tau, \tag{4}$$

$$C = \int_0^t (u_m)^2 d\tau, \tag{5}$$

$$u_m = w_m * u^{1/n}, \tag{6}$$

$$y_m = w_m * y. \tag{7}$$

**Prova.** Tem-se em (1) que  $u = (K(r - y))^n$ , conseqüentemente a referência fictícia será dada por

$$r_K = u^{1/n}/K + y. \tag{8}$$

Como critério de desempenho utilizaremos  $I$ , dado por (2), onde  $w_m(s)$  é uma função de transferência de comportamento desejável. Introduzimos as notações de  $u_m$  e  $y_m$  dadas pelas equações (6) e (7), respectivamente. Conseqüentemente, teremos

$$y - w_m * r_K = y - w_m * (u^{1/n}/K + y), \tag{9}$$

e

$$\begin{aligned} I &= \int_0^t (y - w_m * r_K)^2 d\tau = \int_0^t (y - u_m/K - y_m)^2 d\tau \\ &= \int_0^t (y^2 + (u_m/K)^2 + y_m^2 - 2yu_m/K - 2yy_m + 2u_my_m/K) d\tau \\ &= A - 2\frac{B}{K} + \frac{C}{K^2}, \end{aligned} \tag{10}$$

onde

$$A = \int_0^t (y - y_m)^2 d\tau, \tag{11}$$

$$B = \int_0^t (y - y_m)u_m d\tau,$$

$$C = \int_0^t (u_m)^2 d\tau.$$

Minimizando o critério de desempenho, acharemos o nosso estimador  $\hat{K}$ :

$$\dot{I} = 2\frac{B}{K^2} - 2\frac{C}{K^3} = 0, \tag{12}$$

implica

$$\hat{K} = \frac{C}{B}, \tag{13}$$

que é o fator de proporcionalidade das função de controle  $u$ .

O valor de  $\hat{K}$  é atualizado dentro de certo período de tempo, para melhorar a convergência.

### 3 Simulações Numéricas

As simulações numéricas foram feitas considerando dois diferentes sistemas dinâmicos não lineares: o sistema de Rössler e o oscilador Duffing. As funções de controle entram de forma independente em cada equação do sistema e são dadas por

$$u_j = (K_j(\tilde{x}_j - x_j))^n, \quad (14)$$

sendo que, para cada um dos sistemas considerados,  $j = \{1, 2, \dots, k\}$  e  $k$  é igual ao número de estados do sistema. As referências  $r_j = \tilde{x}_j$  e as entradas  $y_j = x_j$ . Em [3], as funções de controle contém coeficientes de proporcionalidade, no entanto elas não são independentes nas equações (a função de controle de cada equação depende de todas as variáveis do estado).

Para as simulações foi utilizado o software *Matlab* e para integração do sistema o método *Runge-Kutta* de quarta ordem. Para todos os casos, os valores dos termos das equações (4)-(7) e (11) foram calculados juntamente com o estado, montando um único vetor de funções a serem integradas

$$X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_k \ | \ y_{m_1} \ u_{m_1} \ A_1 \ B_1 \ C_1 \ \dots \ y_{m_k} \ u_{m_k} \ A_k \ B_k \ C_k]^T. \quad (15)$$

O estado inicial é dado por

$$X(0) = X_0, \quad (16)$$

e os valores iniciais de cada  $K_j$  são considerados num único vetor

$$K_j = [K_1 \ K_2 \ \dots \ K_k]^T. \quad (17)$$

A função de transferência  $w_m(s)$  tem a forma

$$w_m(s) = \frac{1}{s + 1}. \quad (18)$$

Para cada caso, será considerado um vetor  $\tilde{x}_j$  que contém a trajetória desejada para o sistema, onde

$$\tilde{x}_j = [\tilde{x}_1(t) \ \tilde{x}_2(t) \ \dots \ \tilde{x}_k(t)]^T. \quad (19)$$

#### 3.1 Caso 1: Oscilador Duffing

A equação de Duffing representada na forma de variáveis de estado é dada por

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\alpha x_1 - \beta x_1^3 - 2\xi x_2 + \gamma \cos(\omega t) \end{cases}, \quad (20)$$

cujos parâmetros, conforme [4], podem ser tomados tais que  $\alpha = -1$ ,  $\xi = 0,125$  e  $\beta = \gamma = \omega = 1$ .

O sistema controlado proposto é descrito como

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1 \\ \dot{x}_2 = -\alpha x_1 - \beta x_1^3 - 2\xi x_2 + \gamma \cos(\omega t) + u_2 \end{cases}. \quad (21)$$

Os valores iniciais de  $K_1$  e  $K_2$  utilizados foram  $K_j = [1 \ 1]^T$ . As trajetórias desejadas são dadas pelas equações paramétricas  $\tilde{x}_j = [1 + 0,3 \cos(t) \quad 1 + 0,3 \sin(t)]^T$  e a condição inicial  $X(0) = [0 \ \dots \ 0]^T$ . As funções de controle  $u_j$  são consideradas como funções polinomiais cúbicas, ou seja,  $n = 3$ . O tempo de simulação foi de 100s e os subintervalos para atualização dos valores de  $K_1$  e  $K_2$  são de 1s. A Figura 1 apresenta as trajetórias desejadas para  $r_1$  e  $r_2$  (em azul) com superposição das trajetórias temporais do sistema controlado  $x_1$  e  $x_2$  (em preto).

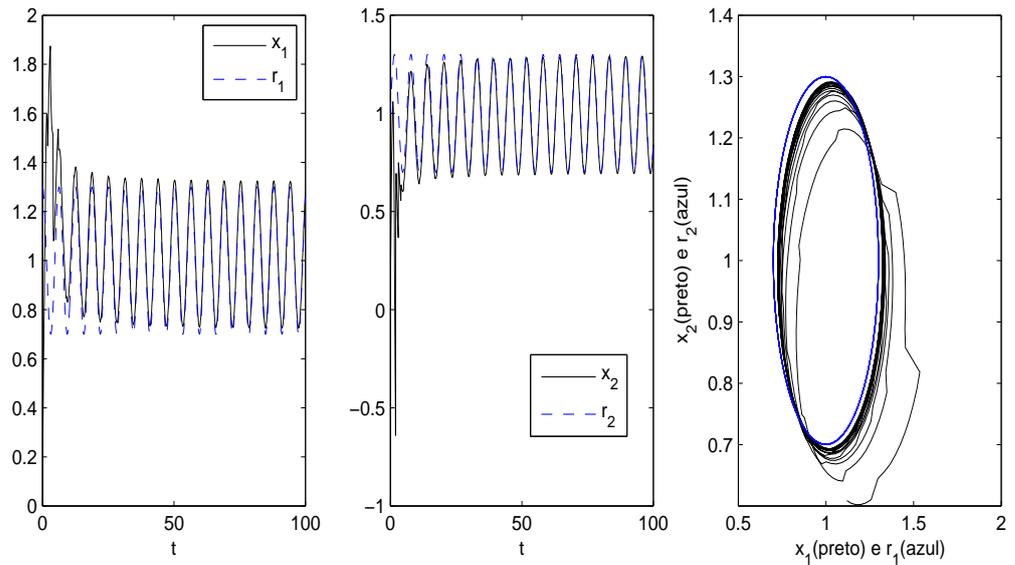


Figura 1: Trajetórias desejadas e controladas do sistema Duffing.

Pela Figura 1 pode-se observar convergência às trajetórias desejadas e de fase, com mínima defasagem na amplitude.

### 3.2 Caso 2: Sistema de Rössler

O sistema de Rössler [5] é dado na forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 + bx_2 \\ \dot{x}_3 = b + x_3(x_1 - a) \end{cases} . \quad (22)$$

As equações diferenciais em (22) definem um sistema contínuo no tempo que exibe um comportamento caótico para os valores de  $a = 5,7$  e  $b = 0,2$ . Além disso, nota-se que a não linearidade do sistema está presente na terceira equação, através do termo  $x_3x_1$ . A importância deste sistema deve-se, dentre outros aspectos, ao contraste entre a sua simplicidade (pois apenas a terceira componente do sistema é não linear em relação a  $x$ ) e a complexidade que sua dinâmica exibe [1].

O sistema com controle pode ser descrito como [3]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_3 + u_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + bx_2 + u_2 \\ \dot{x}_3 = b + x_3(x_1 - a) + u_3 \end{cases}, \quad (23)$$

com as trajetórias desejadas como o vetor  $\tilde{x}_j = [5 + \cos(t) \quad 1 + \sin(t) \quad 1 + \sin(t)]^T$ , o que em termos de diagrama de fase representa um ciclo limite.

A fim de obter os resultados numéricos, os valores de  $K_1$ ,  $K_2$  e  $K_3$  foram periodicamente atualizados em subintervalos de tempo de 0,5s de 0 a 60s. Os valores iniciais  $K_j = [10 \ 10 \ 10]^T$  e a condição inicial  $X(0) = [0 \ \dots \ 0]^T$ . As funções de controle  $u_j$  aqui também são consideradas como funções polinomiais cúbicas, ou seja,  $n = 3$ . A Figura 2 apresenta as trajetórias desejadas para  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$  (em azul) com superposição das trajetórias temporais do sistema controlado  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  (em preto).

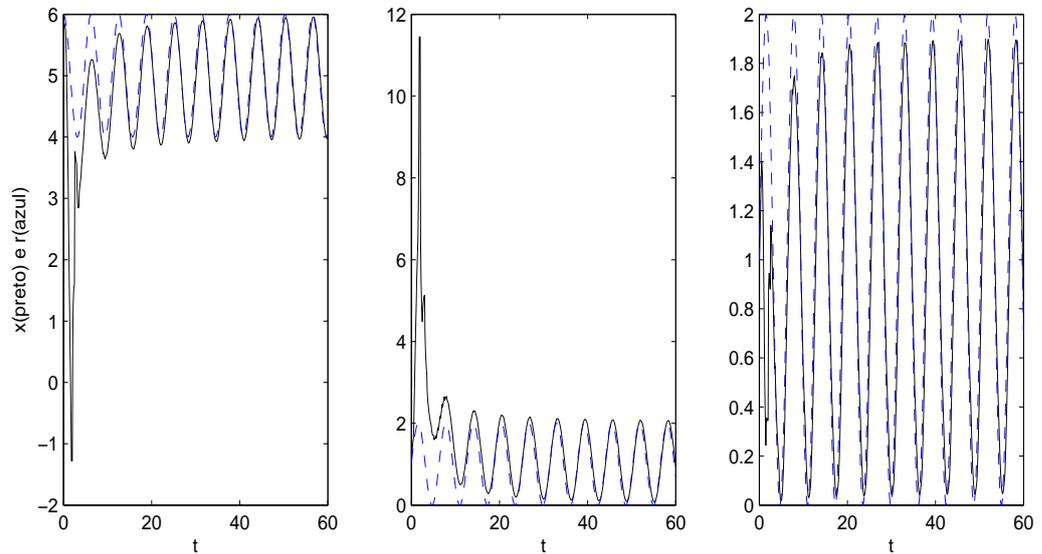


Figura 2: Trajetórias desejadas e controladas do sistema Rössler.

É possível observar na Figura 2 que as trajetórias do sistema controlado convergem para as trajetórias desejadas com uma defasagem mínima na amplitude.

## 4 Conclusões

Neste trabalho foi apresentado um método de identificação de controladores para obtenção de controladores cúbicos utilizados no controle de sistemas não lineares, sem necessidade do conhecimento prévio dos estados e nem das funções de controle. Apenas utilizou-se uma família de controladores cúbicos, donde por índice de desempenho se chegou ao

controlador mais adequado. Pelas simulações observou-se que as trajetórias controladas do sistema convergiram para as trajetórias desejadas, o que mostrou a eficiência da metodologia de controle utilizada. No entanto, há uma forte dependência de sua eficácia com as condições iniciais dos sistemas, com os parâmetros  $K$  iniciais e com a divisão do intervalo de tempo para a atualização dos valores de  $K$ . As mesmas simulações feitas aqui para o caso do controlador cúbico também foram feitas para controladores proporcionais [2]. Percebeu-se que a eficácia de ambos os controladores tem a mesma dependência dos valores iniciais para o estado e  $K$ , e dependência da subdivisão dos intervalos de tempo. Os resultados aqui são promissores a medida que esta técnica é de simples formulação e aplicação, quando comparada a outras metodologias de controle. A escolha da família de controladores cúbicos, como um exemplo simples, também teve caráter didático, pois mostrou a possibilidade de identificar controladores on-line, que não fossem simplesmente proporcionais, a partir dos dados experimentais.

## Referências

- [1] J. Cassiano. Um controlador para o sistema de Rössler. In *Anais da 10ª Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações (Dincon 2011)*, Águas de Lindóia, São Paulo, Brasil, 2011.
- [2] A. Molter and F. B. Cabral. Controle de sistemas não lineares utilizando a técnica de identificação de controladores. In *Anais do Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (XXXV CNMAC)*, Natal, Rio Grande do Norte, Brasil, 2014.
- [3] M. Rafikov and J. M. Balthazar. On control and synchronization in chaotic and hyperchaotic systems via linear feedback control. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 13:1246–1255, 2008.
- [4] M. Rafikov, J. M. Balthazar and A. M. Tusset. An optimal linear control design for nonlinear systems. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences*, 4:279–284, 2008.
- [5] O. E. Rössler. An equation for continuous chaos. *Physics Letters*, 57A 5:397–398, 1976.
- [6] M. G. Safonov. Origins of robust control: early history and future speculations. *IFAC Proceedings Volumes*, 7(Part 1):1–8, 2012.
- [7] M. G. Safonov and F. B. Cabral. Fitting controllers to data. *Systems and Control Letters*, 43(4):299–308, 2001.
- [8] M. G. Safonov and T. C. Tsao. The unfalsified control concept and learning. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(6):843–847, 1997.