

Difusão de Calor em uma Placa Retangular Usando Autômatos Celulares

Renato V. C. da Silva¹

Laize C. S. de Souza²

Arthur C. Almeida³

Faculdade de Matemática, UFPA, Castanhal, PA

A difusão do calor em uma placa é estudada, em geral, usando-se a solução analítica da equação do calor (1) ou métodos numéricos como o método das diferenças finitas.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\Delta u, \quad \text{em } \Omega. \quad (1)$$

Neste trabalho, entretanto, a proposta é estudar um modelo computacional para esse fenômeno, baseado em autômatos celulares.

Um autômato celular é uma grade regular de células, geralmente quadradas, onde cada uma delas pode estar em um número finito de estados em cada unidade de tempo, junto com uma regra ou função de transição, que define em cada instante como deve ser alterado o estado de cada célula da grade [3]. A mudança de estado das células ocorre de forma sincronizada, em paralelo. Além disso, a regra é de natureza local, envolvendo principalmente o estado das células próximas, ou vizinhança. Dois tipos mais comuns de vizinhança são usados, a vizinhança de Neumann, que envolve apenas as 4 células localizadas ao N, S, L, O e a vizinhança de Moore, que além dessas 4 envolve também as 4 células das diagonais [3]. Segundo [1] autômatos celulares podem ser usados como uma ferramenta apropriada para o estudo de vários fenômenos físicos, tais como a condução de calor em uma placa, em lugar das tradicionais equações diferenciais parciais, conforme será feito neste trabalho.

Usando-se programas que foram desenvolvidos na linguagem R [2] foram feitas duas simulações computacionais da condução de calor em uma placa retangular, com o lado superior mantido em uma temperatura de $100^{\circ}C$ e o resto da placa, inicialmente com $0^{\circ}C$. Para a primeira simulação dessa placa foi definida uma grade no formato de uma matriz com 100 linhas e 200 colunas, inicialmente com 0 em todas as células, com exceção da primeira linha mantida no valor de 100 em todos os momentos. Para definir a regra de transição, foi considerado que cada célula assume a média das 8 células da vizinhança de Moore, mas assumindo-se que as células das diagonais, contribuem com $\frac{1}{4}$ de seu valor por terem um contato menor com a célula central. Assim, a regra de transição de estado para cada célula $c_{(i,j)}(t+1)$ é dada por (2)

$$c_{(i,j)}(t+1) = (4 * (c_{(i-1,j)}(t) + c_{(i+1,j)}(t) + c_{(i,j-1)}(t) + c_{(i,j+1)}(t)) + c_{(i-1,j-1)}(t) + c_{(i-1,j+1)}(t) + c_{(i+1,j-1)}(t) + c_{(i+1,j+1)}(t)) / 20. \quad (2)$$

A segunda simulação foi feita com a mesma placa retangular, de 100 x 200 células, nas mesmas condições iniciais, mas agora, usando como regra de transição de estado o esquema derivado da

¹renatovixk@gmail.com.

²laizecrist@gmail.com.

³arthur@ufpa.br.

solução numérica da equação em diferenças finitas, com vizinhança de Neumann. Desta forma, a regra de transição de estado para cada célula $c_{(i,j)}(t+1)$ é dada por (3)

$$c_{(i,j)}(t+1) = c_{(i,j)}(t) + \alpha(c_{(i,j-1)}(t) + c_{(i-1,j)}(t) - 4c_{(i,j)}(t) + c_{(i+1,j)}(t) + c_{(i,j+1)}(t)) \quad (3)$$

Como resultado da primeira simulação, usando-se o valor médio das células da vizinhança de Moore, obtém-se para a temperatura da célula central da grade o valor de $44,34^{\circ}C$, com 18 mil iterações. Na segunda simulação, usando-se o esquema do método das diferenças finitas, com vizinhança de Neumann, obtém-se o valor de $44,29^{\circ}C$, com 20 mil iterações. O valor exato da temperatura no centro da placa, dado pela solução analítica é de $44,42^{\circ}C$.

Na Figura 1 vemos o mapa da distribuição de calor na placa, na situação estacionária. Os números nos eixos são as coordenadas das "células" da placa. Os números na escala lateral indicam a temperatura (C) de cada cor. Além do resultado mostrado também foi feito um estudo da convergência da solução numérica para a solução analítica exata, nos dois modelos simulados.

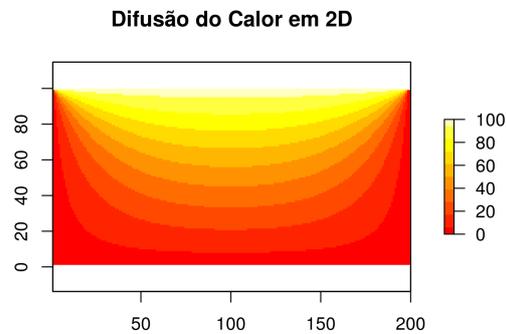


Figura 1: Difusão de Calor em Placa Retangular (Vizinhança de Moore)

Agradecimentos

Os autores agradecem à PROEX, Pró-Reitoria de Extensão da UFPA, pelo auxílio financeiro que os ajudou a participar deste CNMAC.

Referências

- [1] Feldman, D. P.; *Chaos and Fractals. An Elementary Introduction*. Oxford University Press, United Kingdom, 2012.
- [2] R Core Team; R: A language and environment for statistical computing. *R Foundation for Statistical Computing.*, Vienna, 2019.
- [3] Schiff, J. L. *Cellular Automata: A Discrete View of the World*. Wiley Interscience, New Jersey, 2008