

## Estudando Funções de Duas Variáveis com o Geogebra

João I. O. Malheiro<sup>1</sup>

Edyvana G. da S. Teixeira<sup>2</sup>

Arthur C. Almeida<sup>3</sup>

Faculdade de Matemática, UFPA, Castanhal, PA

Várias funções simples usadas na modelagem de fenômenos cotidianos, como o cálculo da área de uma sala, precisam de duas ou mais variáveis para sua correta formulação. Assim, o cálculo da área de uma parede que precisa ser pintada tem que levar em conta a sua largura e altura, uma função de duas variáveis. O Cálculo estuda funções com duas ou mais variáveis para expressar seus conceitos e teoremas. Dessa forma, o professor que vai ministrar essa disciplina, além da dificuldade natural de ensinar seus assuntos, depara-se com uma dificuldade adicional que é a de mostrar a representação geométrica e gráfica dessas funções, uma vez que a representação delas é uma superfície no espaço tridimensional. Fazer gráficos de objetos tridimensionais em um quadro plano, bidimensional, acrescenta mais um nível de dificuldade a essa situação.

Por isso, depois que surgiram os computadores pessoais, a partir dos anos 80 do século passado, uma das suas muitas utilizações foi fornecer maneiras mais fáceis de fazer gráficos em suas telas coloridas. Vários programas foram desenvolvidos com essa finalidade, tanto para as áreas de engenharia e arquitetura como para a área de ensino e educação matemática.

De lá pra cá, o uso de computadores no ensino de matemática, em suas várias formas, passou a ser conhecido como uma das modernas tendências, ou estratégias, para o ensino-aprendizagem de matemática nos seus vários níveis de ensino [1].

Constitui o objetivo deste trabalho examinar de que forma um desses muitos programas disponíveis, o Geogebra, pode ser usado, de forma efetiva, para o ensino-aprendizagem de conceitos matemáticos que envolvam a visualização de funções de duas variáveis, cujos gráficos são superfícies no espaço tridimensional.

O programa Geogebra foi desenvolvido pelo matemático austríaco Markus Hohenwarter como produto de sua tese de doutorado [2]. É um programa gratuito, de uso livre, disponível para download no endereço <https://www.geogebra.org>. Na internet e na página do próprio Geogebra encontram-se manuais e apostilas que ensinam o seu uso. Além disso, vários sites da internet, em especial o Geogebra Tube disponibilizam vários exemplos de material educacional produzido com o programa, de forma cooperativa pelos seus muitos usuários ao redor do mundo. Esses materiais ficam disponíveis na Internet e podem ser compartilhados pelos usuários. Com isso, há um incentivo para a colaboração participativa de todos os usuários do programa, além do estímulo para a criação de novos materiais didáticos que podem ser usados nos lugares e escolas mais distantes e remotas, desde que possuam acesso à Internet.

O Geogebra faz parte de uma classe de programas associados com a Geometria Dinâmica [3], uma vez que cada modificação na parte geométrica se reflete na parte algébrica e vice-versa. As coisas acontecem ao vivo na tela do programa e isso permite ao estudante experimentar hipóteses e teorias, levando a novas descobertas e percepções sobre os objetos matemáticos estudados.

---

<sup>1</sup>joaioigormalheiro@gmail.com.

<sup>2</sup>edyvanateixeira@gmail.com.

<sup>3</sup>arthur@ufpa.br.

Funções de duas variáveis são representadas em matemática como  $z = f(x, y)$ , significando que são necessários dois valores de variáveis independentes,  $x$  e  $y$  para que se encontre, mediante algumas operações com elas, o valor da variável dependente,  $z$ . O domínio dessas funções é uma região do plano  $xy$  e sua imagem é uma superfície no espaço tridimensional. A Figura 1 mostra um gráfico da função  $f(x, y) = x^2 - y^2$ , um hiperbolóide, criado com o Geogebra, exibindo também algumas de suas hipérbolas, como curvas de nível.

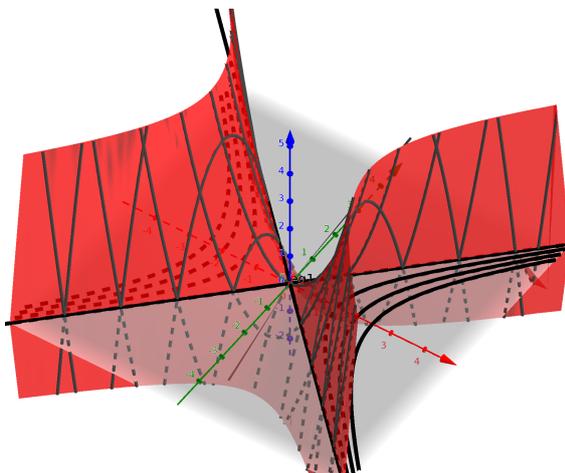


Figura 1: Hiperbolóide  $f(x, y) = x^2 - y^2$  com curvas de nível

Curvas de nível são uma maneira de se visualizar uma superfície no espaço 3D com auxílio de cortes efetuados por planos paralelos ao plano  $xy$  em alturas diferentes da superfície. Do ponto de vista da matemática uma família de curvas de nível de uma função  $z = f(x, y)$  é dada pela equação  $f(x, y) = c$  onde  $c$  são valores constantes representando os diversos níveis de altura em que serão feitos os cortes da superfície.

Recursos computacionais como o Geogebra podem ser úteis nessas visualizações de objetos 3D, pois além de mostrarem as superfícies de uma forma bem atraente para os estudantes, ainda permitem que elas sejam observadas de ângulos diferentes, com apenas um clique, coisa impossível para um professor fazer com um desenho no quadro. Em sala de aula, esses recursos têm se mostrado importantes porque facilitam também a compreensão dos assuntos estudados.

## Agradecimentos

Os autores agradecem à PROEX, Pró-Reitoria de Extensão da UFPA, pelo auxílio financeiro que os ajudou a participar deste CNMAC.

## Referências

- [1] Mendes, I. A. *Tendências Metodológicas no Ensino da Matemática*. Ed. UFPA. Belém, PA, 2008.
- [2] Geogebra. URL: [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org).
- [3] Gravina, M. A. Geometria Dinâmica: Uma Nova Abordagem para o Aprendizado da Geometria. *Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação*, p.1-13. MG, 1996.