Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Estudo da eficiência do método de diferenças finitas de Crank-Nicolson, na obtenção de soluções numéricas para equação de difusão

Lucas S. V. Zampier[1]
Universidae Estadual da Zona Oeste (UEZO), Rio de janeiro, RJ
Ramon A. B. Souza[2]
Universidae Estadual da Zona Oeste (UEZO), Rio de janeiro, RJ

1 Resumo

Os processos difusivos podem ser caracterizados pela transferência de massa de um constituinte, presente em uma região de alta concentração, para outra região de baixa concentração [5].

Para avaliar estes processos difusivos, utiliza-se a Lei de Fick [5], que relaciona o fluxo da difusividade com o gradiente de concentração, resultando numa equação diferencial parcial. Com a inclusão da Lei de Conservação de Massa, esta equação diferencial é modificada e, dependendo das condições ou hipóteses consideradas, pode tornar-se mais simples ou, às vezes, mais complexa de ser resolvida.

Com o intiuto de obter soluções para diversos tipos de equações diferenciais parciais, alguns métodos numéricos computacionais foram desenvolvidos, dentre os quais podemos citar: Método de Diferenças Finitas (MDF), Método de Elementos Finitos (MEF), Métodos Espectrais e Método de Integrais de Contorno.

O método de diferenças finitas [3] caracteriza-se pela discretização do domínio e a substituição das derivadas presentes na equação diferencial, por aproximações envolvendo apenas valores numéricos da função [4].

O processo de discretização, em uma função $u(x_i, t_j)$, com variável espacial x e variável tempo t, constitui-se na construção de uma malha de pontos nodais (x_i, t_j) no domínio dessa função, seguida de aproximações numéricas envolvendo esses pontos.

Quando se quer obter um valor aproximado $u(x_i, t_j)$ de um ponto nodal (x_i, t_j), a partir dos valores de pontos nodais colineares, mas pertencentes a outro nível da malha (por exemplo: $u(x_{i-1}, t_{j-1})$, $u(x_i, t_{j-1})$, $u(x_{i+1}, t_{j-1})$), o método de diferenças finitas é classificado como explícito e, sua solução é direta.

Por outro lado, quando se pretende obter um valor aproximado $u(x_i, t_j)$ de um ponto nodal (x_i, t_j), utilizando pontos nodais colineares ao nível t_j da malha (por exemplo:$u(x_{i-1}, t_j)$, $u(x_{i+1}, t_j)$), o método de diferenças finitas é chamdo de implícito. Nesse caso, geralmente, resolve-se um sistema algébrio de equações.

O método de Crank-Nicolson [1] é um método de diferenças finitas, que consiste na média aritmética entre os métodos Explícito e Implícito.

[1]lucaszampier@gmail.com
[2]ramonattayde@gmail.com

2 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo estudar a eficiência do método de Crank- Nicolson [1] na obtenção de soluções numéricas para equação de difusão (1), juntamente com as condições de contorno (2) e inicial (3):

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x^2} \tag{1}$$

$$C(0,t) = C(L,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \tag{2}$$

$$C(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L \tag{3}$$

$$f(0) = 0 = f(L) \tag{4}$$

sendo $C(x,t)$ representando concentração de uma subsância em determinado meio, x variável espacial, t variável tempo, (2) condições de fronteira, (3) condição inicial e (4) condição de compatibilidade da f.

Inicialmente serão considerados para fins de simulação:

$$L = T = D = 1 \tag{5}$$

sendo: dimensões de espaço (L), tempo (T) e coeficiente de difusividade (D).

Serão avaliadas as soluções numéricas obtidas pelos métodos Explícito e Implícito, com relação a análise de convervgência e estabilidade das soluções, sob critério de Von Neumann [3].

O estudo está sendo desenvolvido no software Octave [2], onde estão sendo implementadas rotinas computacionais para cada método.

Os resultados serão representados por gráficos 2d e 3d, que destacarão o comportamento das soluções numéricas e analíticas, bem como os erros de convergência para cada respectivo método.

Referências

[1] Cuminato, J.A.,Junior, M.M. *Discretização de equações diferenciais parciais.* Coleção Matemática Aplicada, IMPA, 2013;

[2] Eaton, J.W. *GNU Octave. A high-level interative language for numerical computations.* Edition 4 for Octave. 2018;

[3] Iório, V.M. *EDP. Um curso de Graduação.* Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2016;

[4] Silva, M.B., Souza, R.A.B. *Avaliação dos métodos de diferenças finitas explícito e implícito na equação de calor, a partir da comparação das soluções analítica e numérica com uso do teorema de Lax.* Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, volume 7, 2020. 010069-2;

[5] Welty, J.R. et. al. *Fundamentals of Momentum, Heat, and Mass Transfer.* John Wiley and Sons. 2007.