Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Avaliação da estabilidade dos métodos de Euler e Runge-Kutta aplicados em Equação Diferencial Ordinária de 1ª Ordem

Letícia C. A. Silva[1]
Universidae Estadual da Zona Oeste (UEZO), Rio de janeiro, RJ
Ramon A. B. Souza[2]
Universidae Estadual da Zona Oeste (UEZO), Rio de janeiro, RJ

1 Resumo

Uma equação diferencial ordinária (EDO) de ordem n [2], pode ser descrita por:

$$y^{(n)} = f(t, y(t), y'(t), ..., y^{(k)}(t), ..., y^{(n-1)}(t)) \tag{1}$$

onde $f:\ U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $t \in \mathbb{R}$, y é variável dependente e $y^{(k)}$ derivada de ordem k da função $y = y(t)$.

Quando $n = 1$, isto é, a derivada de maior ordem da equação diferencial (1) é igual a um, classifica-se a equação diferencial ordinária como sendo de 1ª ordem.

Sua solução constitui-se num caminho $y:\ I \to \mathbb{R}$ definido e derivável num intervalo I de $\mathbb{R}$, com gráfico inteiramente contido em U e velocidade determinada por f.

Existem diversos estudos que envolvem o uso de equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem, dentre as quais podemos citar: modelagem de crescimento populacional; a tractriz (na geometria diferencial e na engenharia mecânica); a catenária e o estudo de espelhos parabólicos [4].

De um modo geral, quando se pretende resolver uma equação diferencial ordinária, busca-se obter uma família de funções que satisfaçam a esta equação. No entanto, devido à dificuldade em se obter soluções analíticas, torna-se importante a aplicação de métodos numéricos, específicos para cada tipo de equação diferencial.

O método de Euler [1], em sua forma genérica, pode ser descrito pela seguinte relação de recorrência:

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) \tag{2}$$

com $i = 0, ..., n$, condição inicial $y(t_0) = y_0$, sendo h representando a partição relativa à discretização no domínio e com erro de truncamento local proporcional a h^2.

O método de Runge-Kutta [1] consiste na generalização do método de Euler [1], em que considera uma média ponderada de valores de f em pontos (t, y) distintos, com $t \in [t_i, t_{i+1}]$ e pode ser descrito de forma genérica por:

$$y_{i+1} = y_i + h\sum_{j=1}^{m} p_j c_j \tag{3}$$

[1]leticiaeregina@gmail.com
[2]ramonattayde@gmail.com

sendo p_j os pesos, c_j a função aplicada em pontos pertencentes ao interior do intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ e m indicando a ordem do método.

Dessa forma, é possível observar que quando $m = p_j = 1$ e $c_j = f(t_i, y_i)$, tem-se o método de Runge-Kutta de 1ª ordem equivalente ao método de Euler.

2 Objetivos

Este estudo propõe avaliar os métodos numéricos de Euler [1] e Runge-Kutta (4ª ordem) [1], aplicados na equação diferencial ordinária de 1ª ordem (4) com condição inicial (5):

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \tag{4}$$

$$y(t_0) = y_0 \tag{5}$$

e analisar os respectivos erros de convergência de cada método, juntamente com a estabilidade das soluções.

Conforme mencionado, o método de Runge-Kutta utilizado será o de 4ª ordem, com erro de truncamento local proporcional a h^5 e pesos ponderativos de acordo com [1].

Os métodos de Euler e Runge-Kutta [1] serão implementados no software Octave [3], por meio de rotinas computacionais, objetivando identificar maior eficiência, no que tange à convergência das soluções numéricas, quando comparadas com soluções exatas conhecidas.

Pretende-se também obter rotinas computacionais customizadas para cada método numérico implementado.

Os resultados serão representados por meio de gráficos comparativos, destacando as soluções numéricas e analíticas, juntamente com os erros de convergência de cada método aplicado.

Referências

[1] Boyce, W.E., Diprima, R.C.*Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. LTC, 2002;

[2] Doering, C.I, Lopes, A.O.*Equações Diferenciais Ordinárias*. Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2014;

[3] Eaton, J.W. GNU Octave. *A high-level interative language for numerical computations*. Edition 4 for Octave. 2018;

[4] Figueiredo, D.G.*Equações Diferenciais Aplicadas*. Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2018.