Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Método de diferenças finitas não clássico: influência da função denominador na solução numérica de um modelo de ordem fracionária

Lislaine Cristina Cardoso[1]
Departamento de Bioestatística, UNESP, Botucatu, SP
Fernando Luiz Pio dos Santos[2]
Departamento de Bioestatística, UNESP, Botucatu, SP
Rubens de Figueiredo Camargo[3]
Departamento de Matemática, UNESP, Bauru, SP

O método de diferenças finitas não clássico (NSFD) foi proposto por [4] e consiste na diferenciação de uma função, com um dado conjunto finito de valores da variável dependente em determinados pontos conhecidos da variável independente.

Esse esquema numérico utiliza uma função denominador dependendo de um espaçamento h e de um conjunto de parâmetros λ, ou seja, $\phi = \phi(h, \lambda)$ [2, 5, 6].

As características do esquema NSFD podem ser resumidas em: aproximação não local, discretização da derivada e função denominador não negativa. Além disso, o esquema NSFD preserva propriedades físicas essenciais das soluções, tais como, monotonocidade, positividade e convergência das soluções.

A primeira aplicação do esquema NSFD em um sistema de ordem fracionária foi feita para o modelo de Brusselator [6]. Desde então, tal método passou a ser aplicado em diversos outros problemas que envolvem equações diferencias de ordem não inteira. A construção do esquema NSFD é baseada na derivada fracionária de Grünwald-Letnikov [1, 7]. Detalhes sobre a construção do método NSFD podem ser vistos em [2–4, 6].

A escolha da função denominador deve garantir uma dinâmica consistente, ou seja, deve garantir que a solução numérica obtida por meio do sistema discretizado preserve as propriedades do sistema contínuo original, e deve satisfazer as seguintes condições:

1. Condição de consistência

$$\phi(h, \lambda) = h^\alpha + O(h^p),\ p > \alpha,\ h \to 0; \tag{1}$$

2. A função $\phi(h, \lambda)$ deve ser real, positiva e crescente;

3. A função $\phi(h, \lambda)$ deve depender dos parâmetros que aparecem na equação diferencial.

[1]lislaine.cardoso@unesp.br
[2]fernando.pio@unesp.br
[3]rubens.camargo@unesp.br

Com relação à condição de consistência, dada pela equação (1), temos:

1. Se $\alpha = 1$, a condição de consistência torna-se $\phi(h, \lambda) = h + O(h^p)$, isso implica que o método tem erro de ordem h^p, e ordem de convergência igual a $p \geq 1$.

2. Se $0 < \alpha < 1$, à medida que $\alpha \to 0$ é esperado uma queda na ordem de convergência.

Nesse contexto o objetivo desse trabalho consiste em analisar a influência da função denominador, utilizada pelo esquema NSFD, na obtenção da solução numérica em um modelo de Hepatite B de ordem não inteira, conforme dado em [2, 3].

Para obtenção da solução numérica para o modelo de ordem não inteira, será utilizado as seguintes funções denominador, h^α, $\frac{\sin(h^\alpha \lambda)}{\lambda}$,$\left(\frac{\sin(h\lambda)}{\lambda}\right)^\alpha$, $\frac{1-e^{-h^\alpha \lambda}}{\lambda}$, $\left[\frac{1-e^{-h\lambda}}{\lambda}\right]^\alpha$.Tais funções satisfazem as três condições acima [6].

Referências

[1] R. F. Camargo e E. C. de Oliveira. *Cálculo fracionário*, Editora Livraria da Física, São Paulo, Brasil, 2015.

[2] L. C. Cardoso, F. L. P. dos Santos and R. F. Camargo. Analysis of fractional-order models to Hepatitis B . *Computational and Applied Mathematics* 4: 1–21, 2018.

[3] L. C. Cardoso. Modelagem matemática para Hepatite B por meio da derivada fracionária de Caputo. Tese de Doutorado. Instituto de Biociências, Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho - UNESP. 121 pg, 2019.

[4] R. Mickens and A. Smith, Finite-difference models of ordinary differential equations: influence of denominator functions, *Journal Franklin Institute,* 327(2): 143-149, 1990.

[5] R. Mickens. Advanceds in the applications of nonstandard finite difference schemes. *Wiley-Interscience,* Singapore, 2005.

[6] M. Y. Ongun, D. Arslan and R. Garrappa, Nonstandard finite difference schemes for a fractional order Brusselator system, *Advances in Difference equations*, 2013(102): 1-13, 2013.

[7] I. Podlubny. Geometric and physical interpretation of fractional integral and fractional differentiation, *Frac. Cal. Appl. Anal*, pages 367-386, 2002.

