Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

OrtoPoli: Uma Ferramenta para Auxílio no Estudo dos Polinômios Ortogonais

Maria Luíza T. Santos[1]
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, DCET, UESC, Ilhéus, BA
Mirela V. de Mello[2]
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, DCET, UESC, Ilhéus, BA

Nesse trabalho apresentaremos um software que denominamos de OrtoPoli que possibilita a geração dos polinômios ortogonais clássicos, de seus gráficos e as principais informações de cada polinômio de maneira intuitiva. Vale mencionar que tais polinômios possuem diversas aplicações nas mais variadas áreas das Ciências Aplicadas.

As ferramentas disponibilizadas para utilização dos polinômios ortogonais exigem uma base de programação para os seus usuários, como o SageMath, que utiliza o Jupyter Notebook (ferramenta que possibilita o desenvolvimento de códigos online), uma vez que para visualizar os gráficos e os polinômios desejados faz-se necessária a inserção de comandos próprios de algumas bibliotecas.

Seja $\mu(x)$ uma função não-negativa e não identicamente nula. Consideremos o seguinte produto interno:

$$< f, g >= \int_a^b f(x)g(x)\mu(x)dx. \tag{1}$$

Definição 1. ***(Sequência de Polinômios Ortogonais)*** *Dizemos que a sequência de polinômios* $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *é ortogonal (SPO) com relação ao produto interno (1) se* $P_n(x)$ *é de grau exatamente* n*, para* $n \geq 0$ *e o produto interno* $< P_n, P_m >= \int_a^b P_n(x)P_m(x)\mu(x)dx$ *equivale a* 0*, se* $n \neq m$ *e a* $\rho_n > 0$ *, se* $n = m$*.*

Os polinômios ortogonais satisfazem várias propriedades, dentre elas, uma relação de recorrência de três termos, e, todos os zeros reais, distintos e pertencentes ao intervalo de ortogonalidade. Os polinômios ortogonais mais utilizados por satisfazerem essas e ainda outras propriedades, são os polinômios ortogonais clássicos.

Definição 2. ***(Polinômios Ortogonais Clássicos)*** *Polinômios ortogonais com respeito ao produto interno (1) são denominados polinômios ortogonais clássicos se a função* $\mu(x)$ *satisfaz a equação diferencial abaixo:*

$$\frac{d}{dx}\left(M(x)\mu(x)\right) = N(x)\mu(x), \text{ onde, } \quad M(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & se \quad [a,b] = (-1,1), \\ x, & se \quad [a,b] = (0,\infty), \\ 1, & se \quad [a,b] = (-\infty,\infty). \end{cases}$$

e $N(x)$ *é um polinômio de grau 1.*

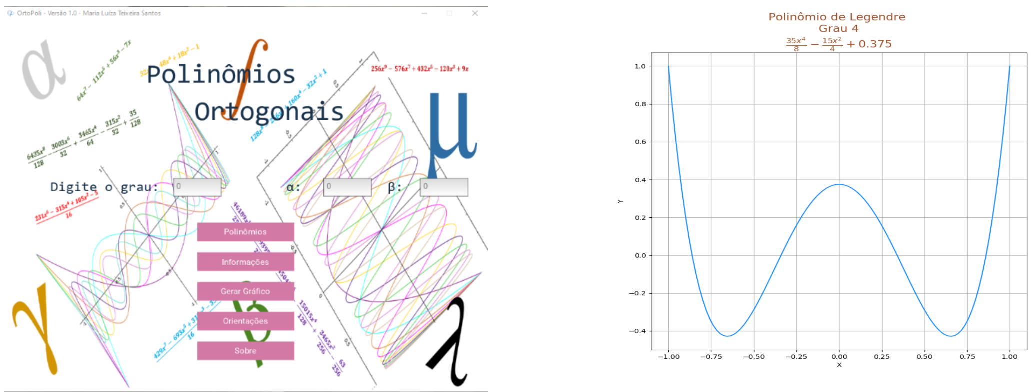
Os polinômios ortogonais que satisfazem a Definição 2 são os de Jacobi, Laguerre e Hermite, conforme a tabela a seguir, com $\alpha > -1$, $\beta > -1$:

[1] luiza_maria98@hotmail.com
[2] mvmello@uesc.br

Tabela 1: Polinômios Ortogonais Clássicos

Polinômios Ortogonais Clássicos	M(x)	N(x)	$\mu(x)$
Jacobi	$1-x^2$	$(\beta-\alpha-x)(\alpha+\beta+2)$	$(1-x)^{\alpha}(1-x)^{\beta}$
Laguerre	x	$\alpha+1-x$	$x^{\alpha}e^{-x}$
Hermite	1	$-2x$	e^{-x^2}

Pensando em facilitar e melhorar o estudo da área em questão, foi-se desenvolvido um software que possibilita a geração dos polinômios e dos gráficos de maneira intuitiva, denominado OrtoPoli. O usuário seleciona o tipo de polinômio ortogonal que deseja, na tela principal ilustrada na Figura 1(a), assim como o grau (em alguns casos, também se faz necessária a inserção de valores para certos parâmetros), e o gráfico é gerado, assim como a forma explícita de cada polinômio, veja a Figura 1(b). Além disso, o software disponibiliza algumas informações acerca dos polinômios clássicos, como o seu intervalo de ortogonalidade, a sua função relacionada $\mu(x)$, os coeficientes da sua relação de recorrência, entre outros.



(a) Tela Principal do OrtoPoli

(b) Gráfico do Polinômio Ortogonal de Legendre (Jacobi com $\alpha=\beta=0$) gereado pelo OrtoPoli

Figura 1: Programa OrtoPoli (Autoria Própria)

Agradecimentos

Ao CNPq e à FAPESB pelo apoio financeiro.

Referências

[1] Andrade, Eliana Xavier Linhares de; Bracciali, Cleonice Fátima. *Polinômios Ortogonais e Similares: Propriedades e Aplicações*. 2008. 94 f. Apostila - Curso de Matemática, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", São José do Rio Preto, 2008.

[2] Chihara, Theodore Seio. *An Introduction to Orthogonal Polynomials*.New York: Gordon And Breach, 1978.