Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Interpretação Combinatória para os Números de Pell [1]

Márcia Teixeira [2]
Universidadde Federal da Grande Dourados - Profmat - UFGD
Irene Magalhães Craveiro [3]
Universidade Federal da Grandde Dourados - Faculdade de Ciências e Tecnologias - Unidade II

1 Introdução

Os números de Pell é uma sequência de números onde os dois primeiros termos valem 0 e 1 e cada número de Pell é obtido pela soma de duas vezes o número de Pell anterior mais o número de Pell antecessor, tal sequência é chamada de sequência de Pell ou números de Pell. A sequência de Pell é tão importante quanto a sequência de Fibonacci e na literatura matemática é possível encontrar uma quantidade razoável de resultados relacionados a essa sequência. Nos últimos tempos alguns matemáticos estudaram a sequência de Pell relacionando com o aspecto combinatório,o nosso objetivo é reconsiderar algumas identidades algébricas e apresentá-las sob um ponto de vista combinatório, de acordo, com [1] e [2]. Para isso apresentaremos uma interpretação combinatória para os números de Pell por meio de uma certa classe de ladrilhamentos para o retângulo de comprimento 1 e largura $1 \times n$.
Definição 1: Seja $n \in \mathbb{N}$, denotamos por P_n o número de Pell de ordem n, cuja lei de formação é dada pela relação recorrência:

$$\begin{cases} P(0) = 0 \\ P(1) = 1 \\ P(n) = 2P_{n-1} + P_{n-2} \end{cases} \tag{1}$$

Segue [4],onde determinamos uma fórmula explícita para os números de Pell pode ser obtida por meio de recorrência lineares ou usando o conceito de função a saber,

$$P(n) = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2})^n - \frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{2})^n.$$

Além disso,$f(x) = \dfrac{x}{1-2x-x^2}$ é a função geradora para a sequência (P_n).

2 Alguns resultados para de Pell

Em [3] são concebidos vários resultados correlacionados aos números de Pell, sendo suas provas obtidas por meio de manipulações algébricas, como por exemplo, o resultado que estabelece que a soma dos primeiros $4n + 1$ números de Pell é um quadrado perfeito, e como consequência outras propriedades para os números de Pell são obtidas. Nessa trabalho iremos enunciar esses resultados que serão apresentados.

[1]apoio financeiro da CAPES
[2]teixe_ira@hotmail.com
[3]irenecraveiro@ufgd.edu.br

Proposição 2.1: Para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$, que $P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_n = \dfrac{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n}{4}$.
Corolário 1: Para todo $n \geq 0$, $S_{4n+1} = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_{4n+1}$ é um quadrado perfeito.
Proposição 2.2: Para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$. Seja $a_n = (S_{4n-1})^{\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^{n} \binom{2n+1}{r} 2^r$.

Proposição 2.3: Para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$. Seja $a_n = (S_{4n-1})^{\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^{n} \binom{2n+1}{r} 2^r = P_{2n} + P_{2n+1}$.

Teorema 1: Para todo $n \in \mathbb{N}$. Temos $P_{n+1} = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-r}{r} 2^{n-2r}$.

Proposição 2.4: Para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$. Obtemos que:$P_{2n-1} + P_{2n+1} = \sum_{r=0}^{n} \dfrac{2n}{2n-r} \binom{2n-r}{r} 2^{2n-2r}$.

Proposição 2.5: Para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$.Temos $P_{2n} + P_{2n+2} = \sum_{r=0}^{n} \dfrac{2n+1}{2n+1-r} \binom{2n+1-r}{r} 2^{2n+1-2r}$.

3 Ladrilhamento para os Números de Pell

Os resultados que iremos enunciar a seguir estabelece relações entre os números de Pell e o ladrilhamento de um retângulo 1 e largura $1 \times n$.Vamos denotar por L_n o número de ladrilhamentos do retângulo $1 \times n$, onde n é um número natural, com três tipos ladrilhos, o ladrilho 1×1 azul, o ladrilho 1×1 vermelho e o dominó 1×2 preto. Queremos determinar uma recorrência que enumera o conjunto dos ladrilhamentos do retângulo $1 \times n$ com três tipos de ladrilhos, um ladrilho de azul 1×1, um ladrilho de cor vermelha 1×1 e um dominó preto 1×2. Assim temos:

$$\begin{cases} L_0 = 1 \\ L_1 = 2 \\ L_n = 2L_{n-1} + L_{n-2}, \text{ para } n > 2 \end{cases}$$

Observe que $L_n = P_{n+1}$, onde P_{n+1} é n-ésimo número de Pell. Portanto P_{n+1} enumera os ladrilhamentos do retângulo $1 \times n$.

Em [2] foram apresentadas diversas propriedades para o número de Pell em que o autor faz validações algébricas para tais resultados. Agora abordaremos um desses resultados fazendo as provas combinatórias de acordo com [3].

Proposição 3.1: Para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$, temos $P_{n+1} = L_n = \sum_{r \geq 0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-r}{r} 2^{n-2r}$.

Referências

[1] Benjamin, A. and Quinn. J. J. *Proofs That Really Count: The Art of Combinatorial Proof. MAA*, 2003.

[2] Benjamin, A. and Plott, S. S. and Sellers, J. A. *Tiling Proofs of recent Sum Identities Involving Pell Numbers. Springer*, 2008.

[3] Santana, S. F. and Diaz-Barrero, J. L. Some Properties of Sums Involving Pell Numbers,*Missouri J. Math. Sci.*,volume 18 (1) 33 - 40, 2006. Doi:10.35834/2006/1801033

[4] Teixeira, M. A. G. Aspectos Algébricos e Combinatórios dos Números de Pell e Catalan, Dissertação de Mestrado, UFGD, 2018.