Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Resolução numérica do modelo de torção elastoplástica via complementaridade mista para seção em L

Tatiana D. Assis[1]
Departamento de Matématica UFJF, Juiz de Fora, MG
Sandro R. Mazorche[2]
Departamento de Matématica UFJF, Juiz de Fora, MG

O assunto abordado neste trabalho compõe os estudos em andamento da dissertação de mestrado da primeira autora, na qual trata-se do *problema da torção elastoplástica* (PTE) de forma mais abrangente. Considere uma barra cilíndrica isotrópica e homogênea sujeita a uma torção aplicada em sua extremidade, o objetivo é definir as regiões do domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ nas quais o material apresenta um comportamento elástico ou plástico. A solução deste problema clássico da engenharia satisfaz a seguinte desigualdade variacional:

$$u \in \mathcal{K} : \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(v-u)\, dxdy \geq -\tau \int_\Omega \nabla(v-u)\, dxdy, \quad \forall v \in \mathcal{K}, \tag{1}$$

sendo $\mathcal{K}$ o conjunto de deslocamentos admissíveis e τ uma constante que engloba propriedades do material e o ângulo de torção. Em sua forma clássica, $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\nabla = \left\{v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) : \|\nabla v\| \leq 1\right\}$.

Como a implementação numérica para $\mathcal{K}_\nabla$ mostra-se bastante complexa, um conjunto mais conveniente $\mathcal{K}_d = \left\{v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) : |u(x,y)| \leq d(x,y)\right\}$ é introduzido, sendo $d : \Omega \to \mathbb{R}$ a função que mede a distância de um ponto em Ω até a fronteira $\partial\Omega$. Conforme demonstrado em [2], resolver o problema (1) em $\mathcal{K}_\nabla$ ou $\mathcal{K}_d$ é equivalente. Assim, o PTE pode ser reescrito como o seguinte *problema de complementaridade mista* (PCM):

$$\begin{cases} -\triangle u(x,y) + \tau &= 0, \quad \textit{se } -d(x,y) < u(x,y) < d(x,y), \\ -\triangle u(x,y) + \tau &> 0, \quad \textit{se } u(x,y) = -d(x,y), \\ -\triangle u(x,y) + \tau &< 0, \quad \textit{se } u(x,y) = d(x,y), \end{cases} \tag{2}$$

o qual foi resolvido numericamente neste trabalho através do método das diferenças finitas. Para encontrar a solução implementou-se o algoritmo de ponto interior FDA-MNCP (*Feasible Directions Algorithm for Nonlinear Complementarity Problem*), proposto em [1].

Com a solução calculada, prossegue-se para a análise das regiões de elasticidade (Ω_E) e plasticidade (Ω_P), que podem ser encontradas da seguinte forma:

$$\Omega_P = \left\{(x,y) \in \Omega : u(x,y) = d(x,y)\right\}, \tag{3}$$

$$\Omega_E = \left\{(x,y) \in \Omega : -d(x,y) < u(x,y) < d(x,y)\right\}. \tag{4}$$

O formato da fronteira que divide essas regiões, chamada *fronteira livre* e dada por: $\Gamma = \partial\Omega_E \cap \Omega = \partial\Omega_P \cap \Omega$, é mostrado na Figura 1.

A seção em L foi construída neste modelo como o conjunto de três quadrados de lado k, com N pontos em cada direção. O cálculo da menor distância de cada ponto até a fronteira (montagem do obstáculo) é divido em três casos – dependendo da localização do ponto –, conforme Figura 2.

[1]tatiana.danelon@engenharia.ufjf.br
[2]sandro.mazorche@ufjf.edu.br

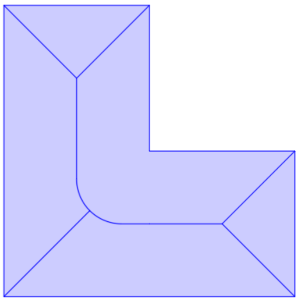

Figura 1: Fronteira livre.

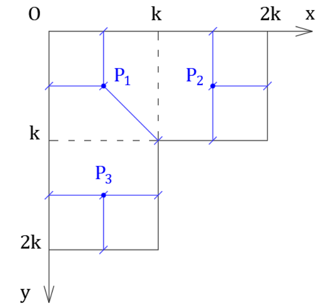

Figura 2: Montagem do obstáculo.

Tomando como exemplo $N = 30$ e $k = 1$, as regiões Ω_E (amarelo) e Ω_P (azul) são exibidas nas Figuras 3 e 4 para dois casos. Com $\tau = 5$ a região de plasticidade representa 47% da área total, já com $\tau = 10$ essa parcela aumenta para 72%. Observa-se, então, que o aumento do torque aplicado gera regiões de plasticidade cada vez mais extensas, convergindo para o limite da fronteira livre.

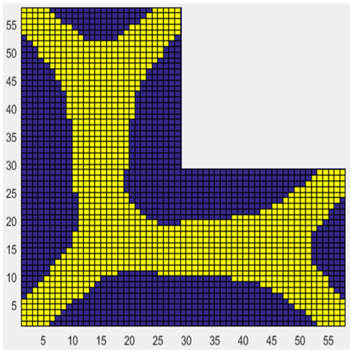

Figura 3: Caso $\tau = 5$.

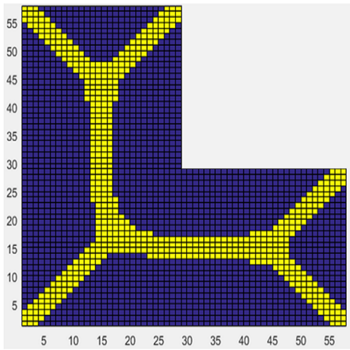

Figura 4: Caso $\tau = 10$.

Trabalhos futuros podem incluir seções em T ou em I, através de discretização análoga ao modelo para seção em L. Além disso, um aprofundamento sobre a constante τ poderia trazer uma abordagem mais realista, já que esta engloba vários parâmetros físicos.

Agradecimentos

Agradecemos à CAPES e ao CNPq, além do PPG Mestrado Acadêmico em Matemática/UFJF, pelo apoio financeiro.

Referências

[1] Gutierrez, A. E., Mazorche, S. R., Herskovits, J. N., Chapiro, G. *An Interior Point Algorithm for Mixed Complementarity Nonlinear Problems*, 175:432-449, 2017. DOI:10.1007/s10957-017-1171-7.

[2] Rodrigues, J. F. Obstacle Problems in Mathematical Physics. In *Mathematical Studies*. North-Holland, 1987. ISBN: 0 444 70187 7.