

Modelagem matemática e equações diferenciais ordinárias: Aplicações dos modelos de Von Bertalanffy e Gompertz

Gabriel M. Vascon¹
Vanderléa R. Bazão²
FACET/UFMGD, Dourados, MS

O estudo das Equações Diferenciais Ordinárias é fundamental no desenvolvimento de modelos matemáticos em diversas áreas de pesquisa. Em problemas que envolvem o crescimento de animais destacam-se os modelos de Von Bertalanffy e de Gompertz.

O modelo de Von Bertalanffy, como analisado em [1], baseia-se no princípio de Alometria. Este determina que a taxa de variação do peso de um peixe é proporcional a área de sua superfície física, (anabolismo) e a sua perda de massa, (catabolismo). Para esse modelo temos a seguinte equação:

$$\frac{dP}{dt} = \alpha S - \beta P, \quad (1)$$

com α igual a constante de anabolismo e β igual a constante de catabolismo. S e P representam, respectivamente, superfície fisiológica e peso do peixe. Por outro lado, o modelo de Gompertz é comumente utilizado para descrever crescimentos populacionais lentos. Em termos de peso, a equação de Gompertz [2] é a seguinte:

$$\frac{dP}{dt} = rP \ln \left(\frac{K}{P} \right), \quad (2)$$

sendo r uma constante de crescimento própria da espécie e $K = P_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$ que é o peso máximo teórico que o peixe pode obter.

O objetivo deste trabalho foi analisar o crescimento em peso de um grupo de peixes da espécie Tilápia do Nilo (*Oreochromis niloticus*), e comparar os valores encontrados nas soluções das equações para o peso médio dos modelos, com os valores de experimentos reais sobre o peso dos peixes. Foram utilizados o Critério de Informação de Akaike Corrigido (AICc) e o Coeficiente de Determinação Ajustado (R_{aj}^2) como avaliadores de modelo, de modo que, o melhor modelo é aquele que apresenta o menor valor de (AICc) e o maior (R_{aj}^2).

Através do método iterativo de Gauss-Newton, com o auxílio computacional do *software* R, foi possível obter as seguintes soluções das equações diferenciais (1) e (2), para o modelo de Von Bertalanffy e de Gompertz, com base nos dados experimentais retirados de [3]:

$$p(t) = 120,662974(1 - 0,757054e^{-0,479716t})^3 \quad (3)$$

$$p_G(t) = 111,126304e^{-3,512167e^{-0,647587t}} \quad (4)$$

A Tabela 1 abaixo mostra os valores reais de peso e os valores calculados pelas soluções (3) e (4), considerando os cinco primeiros meses de acompanhamento, enquanto a Figura 1 ilustra os mesmos graficamente. A Tabela 2, por sua vez, apresenta os resultados dos avaliadores de modelo.

Tabela 1: Peso das Tilápias do Nilo

Tempo t (meses)	Peso real p (gramas)	Bertalanffy	Gompertz
0	1,32	1,730231	3,31514
1	18,25	18,10816	17,68516
2	43,12	43,18016	42,47263
3	67,16	66,64659	67,17807
4	83,82	84,74418	85,39404
5	97,90	97,43982	96,81801

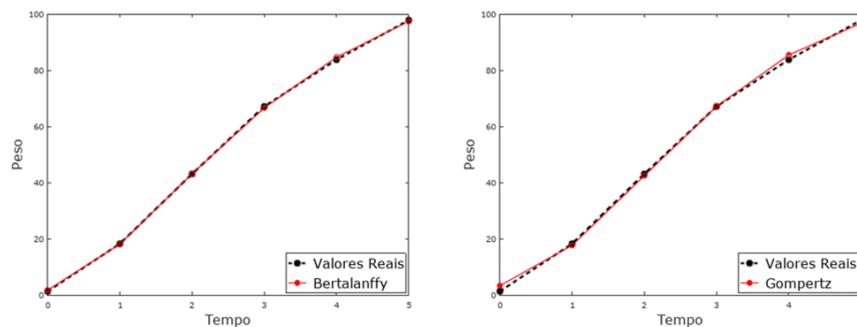
Fonte: Acervo Pessoal dos Autores

Tabela 2: Avaliadores de modelo

Modelo	(AICc)	(R_{aj}^2)
Bertalanffy	28,79485	0,999645
Gompertz	39,02273	0,998045

Fonte: Acervo Pessoal dos Autores

Figura 1: Comparação gráfica dos modelos para o peso das tilápias



Fonte: Acervo Pessoal do Autor

Concluimos que, apesar das boas aproximações do modelo de Gompertz apresentados na Tabela 1 e na Figura 1, os avaliadores de modelos apontam que o modelo de Von Bertalanffy é mais indicado para descrever o fenômeno o grupo de peixes analisado.

Referências

- [1] Bassanezi, R. C.; Ferreira Jr., W. C. *Equações Diferenciais com Aplicações*. Harbra, São Paulo, 1988.
- [2] Boyce, W. E.; De Prima, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e problemas de valores de contorno*. LTC. Rio de Janeiro, 1999.
- [3] Medri, V. , Pereira, V. G. e Leonhardt, J.H. *Crescimento de Tilápia do Nilo alimentada com diferentes níveis de levedura alcooleira, alocada em tanquerede*. Boletim do Instituto de Pesca, São Paulo, 1998/1999.

¹gabrielmorenovascon@gmail.com

²vanderleabazao@ufgd.edu.br