Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

Trabalho apresentado no XL CNMAC, Evento Virtual - Co-organizado pela Universidade do Mato Grosso do Sul (UFMS).

Aplicação do FAIPA para resolução de Problemas de Complementaridade Não Linear

Matheus Tobias Mendonça[1]
UFJF, Juiz de Fora, MG
Sandro Rodrigues Mazorche[2]
Departamento de Matemática - UFJF, Juiz de Fora, MG

Neste trabalho será verificado os conceitos básicos da implementação computacional do FAIPA (Feasible Arc Interior Point Algorithms) [2] [3], para uma classe de problemas em programação matemática conhecida como Problemas de Complementaridade Não-Linear (NCP). O FAIPA é um algoritmo de ponto interior para a minimização de uma função não linear com restrições de igualdade e/ou desigualdade. O FAIPA consiste em uma iteração de ponto fixo para resolver as condições de otimalidade de primeira ordem de Karush-Khun-Tucker. Em cada iteração, uma direção de descida é definida pela solução de um sistema linear. Então, o sistema linear é perturbado de forma a desviar a direção de descida e obter uma direção de descida viável e uma nova pertubação no sistema linear é feita, afim de obter uma direção para compor a busca em arco. Pela forma como o FAIPA obtem a direção de busca que permite realizar uma busca em arco somente na vaiável primal, enquanto as variáveis duais e a matriz hessiana que compõem o sistema linear, são atualizadas a cada iteração por uma regra de atualização. Essas regras de atualizações do FAIPA, permitem implementar por exemplo, métodos quase-Newton ou versões de primeira ordem do algoritmo. Portanto, veremos neste trabalho, que uma dessas regras de atualização, tornará o FAIPA em um algoritmo de Complementaridade (NCP).

Apresentamos as definições de um Problema de Otimização com Restrição de Desigualdade(PO) e de Problema de Complementaridade(PC). Sejam $f(x)$ uma função de $\Re^n$ em $\Re$ e $g(x)$ de $\Re^n$ em $\Re^m$ de classe $C^2(\Re^n)$:

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s. a:} & g(x) \leq 0. \end{array} \tag{1}$$

Um problema de Complementaridade (NCP) é definido da seguinte forma: Seja $F(x)$ uma função de $\Re^n$ em $\Re^n$. Dizemos que $x \in \Re^n$ é uma solução para NCP se e somente se

$$x_i \geq 0,\ F_i(x) \geq 0 \ \text{ e } x_i.F_i(x) = 0 \ , \ \forall\, i \in \{1, 2, ..., n\}. \tag{2}$$

É fácil ver que para o problema de minimização (1), se considerarmos $f(x) = x^t F(x)$ e $G(x) = [-F(x), -x]^t$, segue que o NCP (2) tem solução se e somente se o problema de minimização (1) possui solução com $f(x) = 0$. Da estrutura especial que o problema (1) tem, segue que uma solução $\bar{x}$ de (1) onde $f(\bar{x}) = 0$, os multiplicadores de lagrange, (λ_1, λ_2) associados as restrições $-F(x) \leq 0$ e $-x \leq 0$, é o vetor $(\bar{x}, F(\bar{x}))$ (ver [1]). Para uma descrição mais detalhada do FAIPA indicamos [2], [3] e para o FDA-NCP [4] e [5]. Destacamos aqui a expressão da busca em arco

$$x_{k+1} = x_k + t.d + \frac{t^2}{2} d_a \tag{3}$$

[1] matheustobiasmendonca@gmail.com
[2] sandro.mazorche@ufjf.edu.br

 © 2021 SBMAC

Nosso teste numérico será feito para o problema 1, Kojima-Josephy (K-J), e para o problema 2, Kojima-Shindo (K-S), um conjunto de 100 de pontos iniciais, onde estes pontos foram gerados aleatoriamente, com cada coordenada de x no intervalo $[1, 100]$, e todos os pontos viáveis. O resultado desse teste é apresentado na tabela 1, onde a coluna (C) indica a porcentagem de convergência do algoritmo e (NC) a porcentagem de não-convergência do algoritmo. (ver detalhes em [5] e [4])

Alg	FDA-NCP		FAA-NCP		FAIPA		FAIPA-NCP		FB	
Problema	C	NC	C	NC	C	NC	C	NC	C	NC
K-J	100%	-	100%	-	38%	62%	99%	1%	32%	68%
K-S	100%	-	100%	-	48%	52%	100%	-	95%	5%

Tabela 1: Histórico dos Problemas Testes

Para o problema (K-J), o algoritmo FDA-NCP e FAA-NCP convergiram em todos os 100 pontos gerados, enquanto o Algoritmos FAIPA sem a atualização, convergiu apenas 38% dos 100 pontos gerados, em contra partida o FAIPA-NCP, convergiu em 99% dos 100 pontos gerados, enquanto o algoritmo FB, só convergiu em 32% dos 100 pontos gerados. Para o problema de (K-S), que tem duas soluções uma degenerada e uma outra não degenerada, os algoritmos FDA-NCP e FAA-NCP, convergiram em 100% dos pontos gerados para a solução degenerada. Para o algoritmo FAIPA sem a atualização, convergiu 35% dos 100 pontos gerados para a solução degenerada e convergiu 13% dos 100 pontos gerados para a solução não degenerada. Já no caso do FAIPA-NCP com atualização em (λ, B), a convergência ocorreu em todos os 100 pontos gerado, sendo 64% para a solução degenerada e 36% para a solução não degenerada. Para o algoritmo FB, este convergiu em 95% dos 100 pontos gerados com 85% dos 100 pontos para a solução degenerada e 10% foi para solução não degenerada. Assim, podemos perceber o quanto o algoritmo FAIPA-NCP com a atualização em (λ, B) obteve desempenho superior ao FAIPA sem atualização e também com relação ao algoritmo FB, que é específico para problemas de complementaridade. Trabalhar com esta atualização permitiu fazer uma abordagem de uma busca em arco para o algoritmo FDA-NCP, que também trouxe melhorias no seu desempenho.

Agradecimentos

Agradecemos à Pró-Reitoria de Pós-graduação e Pesquisa da Universidade Federal de Juiz de Fora, por concedernos a bolsa PIBIC com qual apoia nossa pesquisa.

Referências

[1] Cottle, R. W. Nonlinear Programs with Positively Bounded Jacobians, *Journal of SIAM on Applied Mathematics* 14,1966, p. 147-158.

[2] Herskovits, J. and Santos, G. On the computer implementation of feasible direction interior point algorithms for nonlinear optimization, *Structural optimization*, 14:165, 1997. DOI: 10.1007/BF01812519

[3] Herskovits, J. Feasible Direction Interior-Point Technique for Nonlinear Optimization, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 99:121, 1998. DOI: 10.1023/A:1021752227797.

[4] Herskovits, J. and Mazorche, S. R. A feasible directions algorithm for nonlinear complementarity problems and applications in mechanics,*Struct. Multidiscip. Optim.* 37(5), 435–446, 2009.

[5] Mazorche, S. R. Algoritmos para Problemas de Complementaridade Não Linear, COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia Mecânica, 2007.

© 2021 SBMAC