

Descrição matemática da decomposição própria ortogonal (*proper orthogonal decomposition*)

Daniel Ammirante da Cunha¹
 PPGMAT/UNIFESP, São José dos Campos, SP
 Cláudia Aline A. S. Mesquita²
 PPGMAT/UNIFESP, São José dos Campos, SP

1 Introdução

Decomposição Ortogonal Própria (*Proper Orthogonal Decomposition-POD*) é um poderoso método para obter Modelos de Ordem Reduzida [3]. O POD é um método baseado em dados (*data-based*); ou seja, baseado em padrões dos dados gerados por experimentos ou simulações. Esses dados são obtidos pela excitação do sistema físico por meio de entradas externas ou distúrbios nas variáveis do problema. A ideia principal do POD é obter uma base ortonormal (conjunto ortonormal total) que representa os principais padrões do conjunto de dados de forma “ótima”, no sentido de mínimos quadrados. A fim de criar o modelo de ordem reduzida, assume-se que a variável da equação diferencial pode ser aproximada por meio de uma combinação linear finita da base ortonormal. O modelo de ordem reduzida é obtido utilizando essa aproximação e projetando as equações no subespaço de dimensão finita com a projeção de Galerkin. Dessa forma, o POD *decompõe* os dados em um conjunto *ortogonal* de padrões que são ordenados pelo nível de importância de cada padrão para os *próprios* dados.

2 Resultado principal

O resultado principal do trabalho [1] é dado pelo seguinte Teorema

Teorema 1. *Seja H um espaço de Hilbert separável e $\mathcal{V}_P \subset H$ um subconjunto de dados. Se os elementos de \mathcal{V}_P puderem ser parametrizados tal que $y \in L^2(\mathcal{I}, H)$, e se o operador média comuta com o produto interno, então*

(i) *existe solução do problema de otimização dado pelo ℓ -tamanho de Kolmogorov*

$$\delta_\ell(\mathcal{V}^\ell; H) = \inf_{\mathcal{B}^\ell \subset H} \left\langle \left\| y(t) - \sum_{j=1}^{\ell} (y(t), \phi_j)_H \phi_j \right\|^2 \right\rangle_{\mathcal{V}_P} \quad (1)$$

denotada por $\mathcal{B}^\ell = \{\phi_j\}_{j=1}^{\ell}$. Esta é conhecida como base POD, e

¹daniel.ammirante@gmail.com

²caas.mesquita@unifesp.br

(ii) o conjunto \mathcal{B}^ℓ é formado pelo conjunto ortonormal dos ℓ autovetores associados aos ℓ primeiros (maiores) autovalores $\{\lambda_j\}_{j=1}^\ell$ do operador POD

$$\mathcal{R}\phi = \left\langle y(t)(\phi, y(t))_H \right\rangle_{\mathcal{V}_P} \quad \text{para } \phi \in H; \quad (2)$$

(iii) Além disso, o ℓ -tamanho de Komogorov satisfaz

$$\delta_\ell(\mathcal{V}^\ell; H) = \inf_{\mathcal{B}^\ell \subset H} \left\langle \left\| y(t) - \sum_{j=1}^\ell (y(t), \phi_j)_H \phi_j \right\|^2 \right\rangle_{\mathcal{V}_P} = \sum_{j=\ell+1}^\infty \lambda_j \quad (3)$$

3 Aplicações

O Teorema 1 foi aplicado em dois problemas: a equação da onda unidimensional em um domínio limitado; e a vibração livre não-amortecida de uma estrutura (linear e não-linear). A Figura 1 mostra um exemplo comparando a solução analítica da equação da onda em 6 instantes de tempo com a solução obtida pelo modelo de ordem reduzida utilizando um subespaço de dimensão finita $\ell = 3$ com a base POD e a base de Fourier. Em que é possível observar, que com um mesmo número de modos, o POD conseguiu aproximar “melhor” a solução analítica. A Figura 2 mostra um exemplo do espaço de fase da solução da vibração livre não-amortecida de uma estrutura não-linear com 2 graus de liberdade junto com a base POD (autovetores), neste caso é possível verificar que os autovalores do operador POD representam as direções principais do movimento.

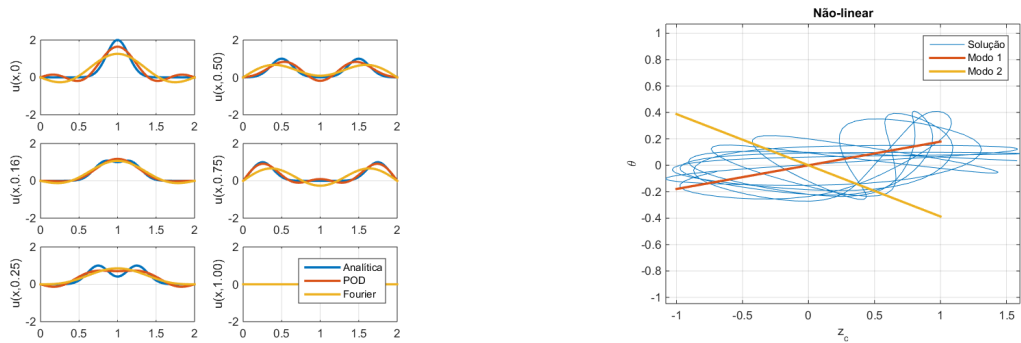


Figura 1: Equação da onda unidimensional

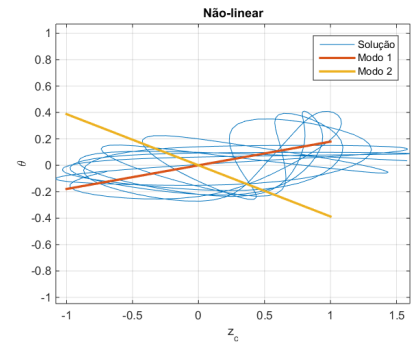


Figura 2: Espaço de fase da solução de vibração livre não-amortecida

Referências

- [1] Cunha, D. A. Um Estudo Sobre Proper Orthogonal Decomposition: Fundamentação Teórica. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Ciência e Tecnologia, Universidade Federal de São Paulo. São José dos Campos, p. 167, 2020.
- [2] Gräßle, C. Adaptivity in Model Order Reduction with Proper Orthogonal Decomposition, Tese de Doutorado, Department of Mathematics University of Hamburg, 2019.
- [3] Kunisch, K and Volkwein, S. Proper Orthogonal Decomposition for Linear-Quadratic Optimal Control, *Model Reduction and Approximation*, SIAM-Society for Industrial and Applied Mathematics, chapter 1, pages 3-63, 2017.